

UNIVERSITATEA TEHNICĂ "GH. ASACHI" DIN IAȘI

curs

MECANICĂ TEORETICĂ  
I

Șef lucr.dr.ing. Eugen Corduneanu

Iași, 2018



# Cuprins

<b>INTRODUCERE</b>	<b>5</b>
Obiectul mecanicii . . . . .	6
Noțiuni fundamentale în mecanică . . . . .	7
Modele simplificatoare ale mecanicii . . . . .	7
Mărimile fizice ale mecanicii clasice . . . . .	8
<b>I. ELEMENTE DE CALCUL VECTORIAL ÎN MECANICA CLASICĂ</b>	<b>11</b>
I.1. Clasificarea mărimilor fizice vectoriale . . . . .	11
I.2. Principiile mecanicii clasice . . . . .	13
I.3. Operații definite pe mulțimea vectorilor liberi . . . . .	14
I.4. Proiecția unui vector pe o axă . . . . .	18
I.5. Expresia analitică a unui vector . . . . .	19
I.6. Extinderea operațiilor cu vectori de pe mulțimea vectorilor liberi . . . . .	20
I.7. Expresiile analitice ale operațiilor cu vectori . . . . .	21
I.8. Momentul polar al unui vector alunecător . . . . .	25
I.9. Legea de variație a momentului polar la schimbarea polului . . . . .	26
I.10. Determinarea suportului unui vector alunecător în funcție de momentul polar . . . . .	28
I.11. Momentul axial al unui vector alunecător . . . . .	30
<b>II. REDUCEREA SISTEMELOR DE VECTORI ALUNECĂTORI</b>	<b>33</b>
II.1. Definiția sistemului de vectori alunecători . . . . .	33
II.2. Rezultanta și momentul resultant al unui sistem de vectori alunecători . . . . .	34
II.3. Torsorul unui sistem de vectori alunecători . . . . .	35
II.4. Invarianții scalari ai unui sistem de vectori alunecători . . . . .	35
II.5. Sisteme simple de vectori alunecători . . . . .	37
II.6. Echivalența sistemelor de vectori alunecători. Teoremele de echivalență . . . . .	41
II.7. Teorema lui Varignon . . . . .	50
II.8. Cazurile de reducere ale sistemelor de vectori alunecători . . . . .	53
II.9. Axa centrală a unui sistem de vectori alunecători. Torsorul minim . . . . .	53
II.10. Cazuri particulare de sisteme de vectori alunecători . . . . .	58
II.10.1. Sisteme de vectori coplanari . . . . .	58
II.10.2. Sisteme de vectori paraleli . . . . .	59
II.11. Distribuții de forțe . . . . .	62
II.11.1. Distribuția oarecare de forțe paralele . . . . .	63

II.11.2. Distribuția uniformă de forțe paralele . . . . .	65
II.11.3. Distribuția liniară de forțe paralele . . . . .	66
<b>III. CENTRE DE GREUTATE</b>	<b>67</b>
III.1. Centrul de greutate al unui sistem de puncte materiale . . . . .	67
III.2. Centrul de greutate al unui corp material solid . . . . .	71
III.2.1. Centrele de greutate ale corpurilor unidimensionale de forme particulare . . . . .	73
III.2.2. Centrele de greutate ale corpurilor bidimensionale de forme particulare . . . . .	82
III.2.3. Centrele de greutate ale corpurilor tridimensionale de forme particulare . . . . .	84
<b>IV. STATICA</b>	<b>87</b>
IV.1. Statica punctului material . . . . .	87
IV.1.1. Legăturile punctului material . . . . .	87
IV.1.2. Reacțiunile legăturilor. Legea frecării. Axioma legăturilor . . .	88
IV.1.3. Condiția de echilibru static a punctului material . . . . .	89
IV.2. Statica solidului rigid . . . . .	90
IV.2.1. Legăturile corpului solid . . . . .	90
IV.2.2. Reacțiunile legăturilor. Legile de frecare . . . . .	91
IV.2.3. Cuple cinematice . . . . .	95
IV.2.4. Reazeme. Reacțiunile din reazeme. Axioma legăturilor . . . . .	96
IV.2.5. Condiția de echilibru static a corpului solid . . . . .	99
IV.3. Statica sistemelor de corpuri . . . . .	100
<b>V. CINEMATICA</b>	<b>103</b>
V.1. Cinematica punctului material . . . . .	104
V.1.1. Traiectoria, viteza și accelerația . . . . .	105
V.1.2. Traiectoria, viteza și accelerația în coordonate carteziene . . . .	108
V.1.3. Traiectoria, viteza și accelerația în coordonate cilindrice . . . . .	109
V.1.4. Traiectoria, viteza și accelerația în coordonate sferice . . . . .	111
V.1.5. Viteza și accelerația în coordonate intrinseci . . . . .	114
V.1.6. Studiul calitativ al mișcării punctului material . . . . .	116
V.1.7. Cazuri particulare de mișcări ale punctului material . . . . .	117
V.2. Cinematica solidului rigid . . . . .	119
V.2.1. Mișcarea de translație . . . . .	122
V.2.2. Mișcarea de rotație plană . . . . .	123
V.2.3. Mișcarea plan-paralelă . . . . .	127
V.2.4. Mișcarea elicoidală . . . . .	132
<b>Bibliografie</b> . . . . .	137

## INTRODUCERE

*Mecanica* este acea știință a naturii care studiază forma cea mai simplă de mișcare a materiei, mișcarea mecanică.

*Materia, mișcarea, spațiul și timpul* fac parte dintre conceptele cele mai generale ale cunoașterii umane și sunt noțiuni utilizate în știință.

*Materia* este ceva dat, care există independent de observator și reprezintă realitatea percepută de observator. Proprietatea fundamentală a materiei este mișcarea, un fenomen care are loc în spațiu și în timp. *Materia* există numai în forme și realități concrete.

Prima modalitate de existență a materiei este *substanța*. Substanța are o structură discretă, fiind formată din particule (molecule, atomi, electroni, protoni, neutroni). Substanța poate exista în diferite stări: solidă, lichidă, fluidă, plasmă. În cazul substanței în stare solidă se introduce noțiunea de corp solid. Substanța în stare lichidă sau fluidă este desemnată doar prin cantitate și volum, fără a prezenta caracteristici de formă.

O altă modalitate de existență a materiei este cea a *câmpurilor fizice* de natură gravitațională, electrică sau magnetică. Această formă de existență a materiei a fost observată relativ recent (sec. XVIII). Câmpul fizic este conceput ca un mediu material continuu, diferit de substanță. Aspectul cantitativ este dat de intensitatea câmpului, care este în legătură cu densitatea de energie.

Mișcarea este forma de manifestare a materiei în Univers. Mișcarea are un caracter relativ deoarece depinde de observator. Mișcarea mecanică raportată la un sistem de referință fix (adică un sistem legat de un corp fix) se numește mișcare absolută, iar mișcarea raportată la un sistem de referință mobil se numește mișcare relativă. Deoarece în Univers nu există corpuri fixe, rezultă că mișcarea mecanică are un caracter relativ.

Repaosul este starea unui corp sau a unui sistem de corpuri a cărui poziție raportată la un anumit sistem de referință rămâne neschimbată în timp. Repaosul este un caz particular al mișcării și are un caracter relativ ca și aceasta.

Mișcarea materiei este un fenomen care are loc în spațiu și în timp. Spațiul și timpul sunt forme fundamentale de existență a materiei. Spațiul este o reprezentare generalizată a dimensiunilor corpurilor și a distanțelor dintre acestea. Timpul este măsura generalizată a intervalului dintre evenimente și a duratei evenimentelor.

Studiul științific al materiei nu se poate face cuprinzând toate aspectele concrete de manifestare, deoarece numărul acestora este foarte mare. Fiecare ramură a științei cercetează aspecte specifice unor nivele relativ distincte de organizare a materiei.

## Obiectul mecanicii

Deosebirea și clasificarea formelor de mișcare ale materiei este o operație de modelare, adică de simplificare a realității prin considerarea anumitor aspecte și neglijarea altora, în funcție de subiectul studiului. Există cel puțin cinci forme fundamentale ale mișcării materiei: mecanică, fizică, chimică, biologică și socială.

Această clasificare a formelor de mișcare stă la baza clasificării corespunzătoare a științelor.

Primele aspecte ale mișcării materiei care au fost observate și studiate sunt și cele mai simple. Acestea se referă la deplasările relative ale corpurilor de dimensiuni observabile (macroscopice) și fac parte din mișcarea mecanică. Mișcarea mecanică este cea mai simplă formă de mișcare a materiei și reprezintă deplasarea materiei în spațiu și în timp fără a se considera modificările calitative ale materiei aflate în mișcare.

Mecanica este știința fundamentală a naturii care studiază mișcarea mecanică, cea mai simplă formă de mișcare a materiei. Mecanica este prima dintre științele naturii, alături de fizică, care utilizează în cel mai înalt grad metodele matematice de investigație, în completare cu metodele experimentale.

Mecanica, considerată ca știință a mișcării mecanice, prezintă mai multe diviziuni: mecanica generală sau clasică, mecanica fluidelor, mecanica relativistă, mecanica cuantică, astronomia.

Obiectul prezentului curs este mecanica generală, numită și mecanică clasică. Prin aceasta se înțelege mecanica fundamentată de Galileo Galilei (1564-1642) și Isaac Newton (1643-1727).

Mecanica generală studiază forma cea mai simplă de mișcare, adică deplasarea în spațiu și în timp a corpurilor sub influența interacțiunilor reciproce dintre acestea. Interacțiunile dintre corpuri sunt apreciate prin forțe: forțe de greutate, forțe de inerție, forțe de legătură, forțe motoare aplicate corpurilor etc. Forțele luate în considerare în mecanica clasică (mecanica newtoniană) sunt cu precădere forțele de natură gravitațională și inerțială.

Gravitația și inerția sunt două dintre proprietățile cele mai importante ale materiei.

Gravitația reprezintă proprietatea corpurilor de a se atrage reciproc.

Inerția reprezintă proprietatea corpurilor de a-și conserva starea de repaos sau starea de translație rectilinie și uniformă și opoziția corpurilor la tendințele de modificare ale acestor stări.

În mecanica clasică se consideră corpurile alcătuite numai din substanță, făcând abstracție de câmpul propriu. Spațiul este tridimensional și euclidian, adică drept. Timpul este unidimensional și apreciază evenimentele și fenomenele în ordinea producerii acestora.

Studiul mișcării mecanice implică raportarea la un sistem de referință, adică un corp luat ca reper. Mișcarea mecanică raportată la un sistem de referință fix (un sistem legat de un corp fix) se numește mișcare absolută, iar mișcarea raportată la un sistem de referință mobil se numește mișcare relativă.

Repaosul este starea unui corp sau a unui sistem de corpuri a cărui poziție în raport cu un anumit sistem de referință este neschimbată în timp. Repaosul este un caz particular de mișcare și are un caracter relativ ca și aceasta.

## Noțiuni fundamentale în mecanică

Conceptele fundamentale în mecanica clasică sunt masa, spațiul și timpul.

Masa este o noțiune caracteristică care măsoară două dintre cele mai importante proprietăți ale materiei: proprietatea de a produce câmp gravitațional și proprietatea de inerție. Gravitația este proprietatea corpurilor de a se atrage reciproc. Inerția este proprietatea materiei sub formă de substanță de a-și conserva starea de mișcare mecanică pe care o are la un moment dat. Masa unui corp este măsura inerției sale în mișcare de translație rectilinie și uniformă.

Spațiul este o reprezentare generalizată a dimensiunilor corpurilor, a pozițiilor reciproce și a distanțelor dintre acestea. Spațiul este tridimensional, infinit și continuu, adică din orice punct al spațiului se pot duce trei drepte reciproc perpendiculare. În mecanica clasică spațiul este considerat omogen și izotrop, adică diferite porțiuni ale sale nu se deosebesc unele de altele.

Timpul reprezintă imaginea generalizată a intervalelor dintre evenimente și a duratei evenimentelor. Timpul este conceput ca un parametru continuu unidimensional care se consumă într-un singur sens (este ireversibil), fără nici o legătură cu observatorul, fiind nelimitat.

În mecanica clasică, noțiunile fundamentale de masă, spațiu și timp sunt considerate independente una de alta, având proprietăți absolute. De exemplu, dacă două evenimente sunt simultane pentru un observator situat într-un sistem de referință, acestea vor fi simultane și pentru alt observator din alt sistem de referință, indiferent de mișcarea sistemelor.

## Modele simplificatoare ale mecanicii

Noțiunea de sistem material ca obiect de studiu al mecanicii clasice poate să cuprindă unul sau mai multe corpuri macroscopice solide. Aceste corpuri sunt reprezentate schematic sub forma unor modele mecanice care conțin proprietățile esențiale din punct de vedere al mișcării mecanice. În mecanica clasică nu se ține seama de structura discretă a corpurilor, ci doar de masa acestora și de forma geometrică și eventual de unele proprietăți cum ar fi rigiditatea sau elasticitatea. Corpul material este modelul mecanic prin care se reprezintă o masă finită ( $m$ ), masa corpului, distribuită în mod continuu într-un volum finit ( $V$ ), volumul corpului.

Corpul solid rigid (rigidul) este un model de bază al mecanicii clasice, care neglijează deformațiile corpului când acestea sunt relativ mici și nu sunt relevante în studiul mișcării mecanice.

Corpurile materiale studiate, deformabile sau rigide, se prezintă sub forme particulare, având denumiri și reprezentări adecvate. În cazul cel mai general, corpurile materiale sunt tridimensionale, având un volum finit  $V$  și o masă finită  $m$ , distribuită în acel volum.

Dacă una dintre dimensiunile corpului este relativ mică în raport cu celelalte două și poate fi neglijată, corpul se prezintă prin modelul denumit *suprafață materială*, care are o arie finită  $A$  și o masă finită  $m$ , distribuită pe acea suprafață. Suprafețele materiale pot fi *plăci*, dacă opun rezistență la schimbarea formei, sau *membrane*, dacă rezistența opusă la schimbarea formei este neglijabilă. Modelul de placă își conservă masa, forma și aria, iar modelul de membrană își conservă numai masa.

Dacă două dintre dimensiunile corpului sunt relativ mici în raport cu cea de-a treia și pot fi neglijate, corpul se prezintă prin modelul denumit *linie materială*, care are o lungime finită  $\ell$  și o masă finită  $m$ , distribuită pe acea linie. Liniile materiale pot fi *bare*, dacă opun rezistență la schimbarea formei, sau *fire*, dacă rezistența opusă la schimbarea formei este neglijabilă. Modelul de bară își conservă masa, forma și lungimea, iar modelul de fir își conservă numai masa și lungimea, dacă firul este considerat inextensibil (nu se întinde).

Dacă toate cele trei dimensiuni ale corpului sunt relativ mici, corpul se reprezintă prin modelul de *punct material*.

Punctul material este un alt model de bază al mecanicii clasice prin care se localizează o masă într-un anumit punct al spațiului tridimensional. Se face observația că pentru asimilarea unui corp cu un punct material dimensiunile corpului sunt importante, ci contextul problemei. Dacă forma și dimensiunile corpului nu intervin în studiul mișcării mecanice, atunci corpul poate fi reprezentat prin modelul de punct material. Dacă corpul care se reprezintă printr-un punct material are dimensiuni finite, masa punctului material este, de asemenea, finită.

Un corp material de dimensiuni finite poate fi asimilat cu un sistem de puncte materiale infinite ca număr, deoarece masa corpului este infinit divizibilă odată cu spațiul pe care îl ocupă (volumul corpului).

Volumul și masa unui astfel de punct material sunt infinit mici ( $dV$  și  $dm$ ) și sunt legate prin relația

$$dm = \rho \cdot dV, \quad (*)$$

unde  $\rho$  este densitatea corpului în punctul respectiv.

## Mărimile fizice ale mecanicii clasice

O mărime fizică este o caracteristică a unui corp material sau a unui proces fizic care oferă informații cantitative asupra subiectului. Exemple de mărimi fizice care oferă



informații despre un corp material: masa, dimensiunile, temperatura, sarcina electrică. Exemple de mărimi fizice care oferă informații despre un proces fizic: viteza, accelerația, energia cinetică, lucrul mecanic. Toate mărimile fizice au unități de măsură, fiind exprimate printr-un număr (real) urmat de unitățile de măsură respective.

Deoarece noțiunile fundamentale ale mecanicii clasice sunt masa, spațiul și timpul, unitățile de măsură fundamentale sunt kilogramul, metrul și secunda.

Toate mărimile fizice ale mecanicii clasice au unități de măsură care se exprimă în funcție de unitățile de măsură fundamentale. Mărimile fizice care au alte unități de măsură sunt temperatura și mărimile fizice de natură electrică și magnetică.

De exemplu, viteza se măsoară în metri pe secundă  $\langle m/s \rangle$ , iar accelerația în metri pe secundă la pătrat  $\langle m/s^2 \rangle$ .

Forța se măsoară în newtoni  $\langle N \rangle$  pentru care avem relația

$$1N = 1 \text{ kg} \cdot m/s^2,$$

unitate de măsură datorată lui Isaac Newton (1643-1727).

Lucrul mecanic și energia se măsoară în jouli  $\langle J \rangle$  pentru care avem relația

$$1J = 1N \cdot m = 1 \text{ kg} \cdot m^2/s^2,$$

unitate de măsură datorată lui James Prescott Joule (1818-1889).

Pentru a defini o mărime fizică este necesar să se precizeze numărul care reprezintă valoarea sa măsurată și unitatea de măsură.

Unele mărimi fizice sunt complet definite în acest mod, de exemplu masa corpurilor, durata fenomenelor, temperatura corpurilor etc. Aceste mărimi fizice se numesc mărimi scalare (scalari).

Alte mărimi fizice, pentru a fi complet definite, pe lângă valoarea măsurată și unitatea de măsură, trebuie să se precizeze și orientarea în spațiu: direcția și sensul, uneori și punctul de aplicație. Aceste mărimi fizice se numesc mărimi vectoriale (vectori).

Ca exemple de mărimi fizice vectoriale se dau: forța, viteza, accelerația etc.

O mărime fizică vectorială se definește printr-un vector și prin unitatea de măsură. Vectorul care exprimă mărimea fizică vectorială se definește prin trei proprietăți: valoare numerică, direcție și sens. A patra proprietate este punctul de aplicație, care trebuie precizat în anumite cazuri: viteze și accelerații, forțe care acționează asupra corpurilor elastice etc.

Principala mărime fizică vectorială în mecanica clasică este forța, ca măsură a interacțiunii dintre corpuri. Forțele luate în considerare în mecanica clasică sunt forțele de natură gravitațională și inerțială, neglijând aspectele electrice și magnetice ale fenomenelor și procesele de dilatare termică. În particular, mai pot fi considerate și forțe de altă natură, de exemplu forțe elastice.

Celelalte mărimi fizice vectoriale din mecanica clasică sunt mărimi rezultate din forțe (care se pot exprima în funcție de o forță), cum sunt accelerația, viteza, impulsul etc. Există și mărimi fizice vectoriale independente de forță, care se pot defini în absența unei forțe, cum sunt inducția câmpului magnetic și intensitatea câmpului electric.

Modul de notare al unei mărimi vectoriale (vector) trebuie să permită distingerea de o mărime scalară (scalar). Astfel, vectorul se va nota cu o literă cu o săgeată deasupra ( $\vec{F}, \vec{a}, \vec{v}$ ), sau cu două litere mari cu o săgeată deasupra ( $\vec{AB}, \vec{OA}, \vec{OB}$ ), prima literă indicând originea (punctul de aplicație), iar a doua literă vârful vectorului, care dă valoarea numerică a acestuia.

## Capitolul I

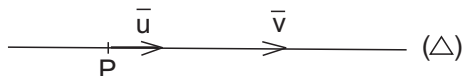
### ELEMENTE DE CALCUL VECTORIAL ÎN MECANICA CLASICĂ

#### I.1. Clasificarea mărimilor fizice vectoriale

Așa cum s-a mai menționat, o mărime fizică vectorială se definește prin trei proprietăți: valoare numerică, direcție și sens.

*Direcția* unui vector este o dreaptă din domeniul spațial de existență al vectorului care este paralelă cu vectorul. Dreapta care este coliniară cu vectorul, adică dreapta care se obține prelungind vectorul dincolo de origine și de vârf, se numește *dreaptă suport*.

Reprezentarea grafică a unui vector este dată în figura următoare, unde notațiile reprezintă :



$\vec{v}$  – mărime fizică vectorială (vector)

$(\Delta)$  – dreaptă suport (axa vectorului)

$P$  – punct de aplicație

$\vec{u}$  – versorul axei  $(\Delta)$

Se numește *versor* al axei  $(\Delta)$  un vector  $\vec{u}$  a cărui lungime este egală cu unitatea de măsură a vectorului  $\vec{v}$ . Versorul  $\vec{u}$  precizează un sens pozitiv pe axa  $(\Delta)$ . Dacă vectorul  $\vec{v}$  are același sens cu  $\vec{u}$ , valoarea sa algebrică este pozitivă, dacă are sens contrar cu  $\vec{u}$  valoarea algebrică este negativă.

Între vectorul  $\vec{v}$  și versorul axei sale se scriu relațiile

$$\vec{v} = v \cdot \vec{u} \quad \text{sau} \quad \vec{u} = \frac{1}{v} \vec{v}, \quad (1.1)$$

unde  $v$  este valoarea algebrică a vectorului.

Prin modulul vectorului se înțelege modulul valorii sale algebrice, un număr pozitiv egal cu lungimea vectorului raportată la unitatea de măsură. Se notează  $|\vec{v}|$ .

Versorul vectorului  $\vec{v}$  se definește prin relația

$$\vec{u}_v = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}. \quad (1.2)$$

Între versorul axei ( $\Delta$ ) și versorul vectorului  $\vec{v}$  avem relația

$$\begin{aligned}\vec{u}_v &= \vec{u}, & \text{dacă } v > 0, \\ \vec{u}_v &= -\vec{u}, & \text{dacă } v < 0.\end{aligned}\tag{1.3}$$

Înlocuind noțiunea de valoare numerică cu modulul și noțiunea de direcție cu dreapta suport, se poate afirma că un vector se definește prin trei proprietăți: modul, dreapta suport și sens.

În mecanica clasică se definesc următoarele categorii (clase) de vectori:

1. *vectori liberi*, a căror dreaptă suport poate ocupa orice poziție în spațiu, paralelă cu direcția dată, punctul de aplicație nefiind precizat;
2. *vectori alunecători*, a căror dreaptă suport este fixă în spațiu și punctul de aplicație este liber pe dreapta suport;
3. *vectori legați*, a căror dreaptă suport este fixă în spațiu și punctul de aplicație este fixat pe dreapta suport.

Se pot da exemple fizice (mărimi fizice vectoriale) corespunzătoare fiecărei categorii de vectori.

Mărimile fizice vectoriale care exprimă intensitatea câmpurilor fizice sunt exemple de vectori liberi.

Accelerația gravitațională  $\vec{g}$ , adică intensitatea câmpului gravitațional terestru, se prezintă ca vector liber într-un spațiu cilindric vertical având ca bază o suprafață terestră suficient de mică pentru a neglija curbura Pământului. Are valoarea  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ , direcția verticală și sensul în jos.

Intensitatea câmpului electric  $\vec{E}$  se prezintă ca vector liber într-un spațiu cilindric având ca baze plăcile unui condensator încărcat electric. Se măsoară în volți pe metru  $\langle V/m \rangle$  și are sensul de la placa încărcată pozitiv la placa încărcată negativ.

Inducția câmpului magnetic  $\vec{B}$  se prezintă ca vector liber într-un spațiu cilindric având ca baze polii nord ( $N$ ) și sud ( $S$ ) ai unui magnet sau electromagnet. Se măsoară în tesla  $\langle T \rangle$ , unitate de măsură datorată lui Nikola Tesla (1856-1943), și are sensul de la polul  $N$  la polul  $S$ .

Ca exemple de vectori alunecători se pot da forțele care acționează asupra corpurilor solide rigide (nedeformabile) și forța de tensiune dintr-un fir întins, dacă firul este inextensibil.

Ca exemplu de vectori legați, adică vectori la care trebuie precizat punctul de aplicație, se dau viteza și accelerația unui punct material în mișcare, forța de greutate a unui corp solid, care are punctul de aplicație în centrul de greutate, forțele care acționează asupra corpurilor solide elastice etc.

## I.2. Principiile mecanicii clasice

Principiile mecanicii clasice, numite și axiome, sunt enunțuri ce nu pot fi demonstrate complet pe cale teoretică sau experimentală, fiind adevăruri necesare construirii unor teorii compatibile cu experiențele și observațiile asupra naturii.

Principiile mecanicii clasice au fost formulate prima dată de către Isaac Newton, de aceea se mai numesc *principiile mecanicii newtoniene*.

În anul 1686 (5 iulie), Isaac Newton a publicat lucrarea *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* în care a prezentat ideile sale și ale predecesorilor săi, în special ale lui Galileo Galilei. În această lucrare sunt prezentate trei principii fundamentale ale mecanicii, numite *axiome* sau *legile mișcării*:

1. Orice corp își păstrează starea de repaos sau starea de mișcare uniformă în linie dreaptă, dacă nu este constrâns de forțe imprimare să-și schimbe starea.
2. Variația mișcării este proporțională cu forța motoare imprimată și este dirijată după linia dreaptă în lungul căreia este imprimată forța.
3. Reacțiunea este totdeauna contrară și egală cu acțiunea sau acțiunile reciproce a două corpuri sunt totdeauna egale și dirijate în sensuri contrare.

La aceste axiome, Newton a mai adăugat șase corolare, dintre care se prezintă două:

**Corolarul 1.** *Un corp sub acțiunea a două forțe unite descrie diagonala unui paralelogram în același timp în care ar descrie laturile sub acțiunile separate ale forțelor.*

**Corolarul 5.** *Mișcările corpurilor închise într-un spațiu dat sunt aceleași între ele, fie că acel spațiu se află în repaos, fie că se mișcă rectiliniu și uniform, fără mișcare de rotație.*

În aceste enunțuri, prin *mișcare uniformă* se înțelege mișcare cu viteză constantă, iar prin variația mișcării se înțelege accelerația.

Mai târziu, denumirea de *corp*, folosită de Newton în formularea legilor mișcării a fost înlocuită cu cea de *punct material*, noțiune introdusă de Leonhard Euler (1707-1783). Corolarul 1, cunoscut mai ales sub numele de *regula paralelogramului*, nu se poate deduce din primele trei legi (axiome) și a fost introdus ulterior în rândul acestora sub denumirea de *principiul paralelogramului* sau *principiul acțiunii forțelor*.

În prezent, sunt acceptate patru principii fundamentale ale mecanicii clasice (newtoniene) pentru care se dau următoarele formulări:

1. *Principiul inerției.* Un corp își păstrează starea de repaos sau de translație rectilinie și uniformă atât timp cât asupra sa nu acționează nici o forță.
2. *Principiul acțiunii forței.* O forță imprimă unui punct material o accelerație egală cu raportul dintre forță și masa punctului material.
3. *Principiul acțiunii și reacțiunii.* În cazul interacțiunii a două corpuri aflate în contact, forța cu care primul corp acționează asupra celui de-al doilea este egală în modul, pe același suport și în sens contrar forței cu care cel de-al doilea corp acționează asupra primului.

4. *Principiul paralelogramului forțelor.* Acțiunea a două forțe asupra unui punct material poate fi înlocuită printr-o singură forță care acționează pe diagonala paralelogramului format de cele două forțe.

Se face observația că formularea primului principiu (principiul inerției) este relativă, deoarece starea de repaos sau de mișcare rectilinie și uniformă depinde de starea sistemului de referință. În conformitate cu acest principiu, un reper aflat în mișcare rectilinie și uniformă se numește *reper inertial*.

Principiul al doilea, care se mai numește *principiul coliniarității forței cu accelerația*, se exprimă prin relația

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad (1.4)$$

denumită *ecuația fundamentală a mecanicii*, unde  $\vec{F}$  este forța care acționează asupra punctului material de masă  $m$  și  $\vec{a}$  este accelerația.

Se menționează că regula paralelogramului pentru compunerea forțelor este cunoscută din antichitate, dar enunțul riguros a fost dat de Simon Stevin (1548-1620), Pierre Varignon (1654-1722) și Isaac Newton.

### I.3. Operații definite pe mulțimea vectorilor liberi

La cursurile de matematică s-a arătat că spațiul tridimensional al geometriei elementare, construit axiomatice pe baza noțiunilor de punct, dreaptă și plan, admite o structură de spațiu euclidian, fiind omogen, izotrop și infinit. Spațiul euclidian tridimensional se notează  $E_3$ . Un vector liber  $\vec{v}$  este definit ca segment orientat în spațiul  $E_3$ :

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB}, \quad (1.5)$$

cu observația că punctele  $A$  și  $B$  pot ocupa orice poziții în spațiul  $E_3$ , în condițiile în care mărimea, direcția și sensul rămân aceleași.

Mulțimea vectorilor liberi din spațiul  $E_3$ , notată  $V_3$ , prezintă o structură de spațiu vectorial. Mulțimea  $V_3$  este un grup algebric abelian pe care s-au definit operațiile de adunare și de înmulțire cu un scalar ([10], [15]).

Dacă  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  și  $\vec{v}$  sunt vectori aparținând mulțimii  $V_3$  și  $\lambda$  este un număr real, atunci vectorii  $\vec{s}$  și  $\vec{w}$  aparțin, de asemenea, mulțimii  $V_3$ :

$$\vec{s} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \quad (1.6)$$

$$\vec{w} = \lambda\vec{v}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1.7)$$

Avem

$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{v} \quad \text{și} \quad 1 \cdot \vec{v} = \vec{v}, \quad (1.8)$$

unde  $\vec{0}$  este elementul neutru la adunare și 1 este elementul neutru la înmulțire.

Vectorul sumă  $\vec{s}$  este dat de regula paralelogramului, enunțată anterior ca principiu al mecanicii clasice, iar vectorul produs  $\vec{w}$  este un vector paralel cu vectorul factor  $\vec{v}$ , având același sens dacă scalarul  $\lambda$  este pozitiv și sens contrar dacă  $\lambda$  este negativ.

Operațiile definite pe mulțimea  $V_3$  prezintă următoarele proprietăți.

Operația de adunare a vectorilor liberi din  $V_3$  este comutativă și asociativă:

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \quad (1.9)$$

$$(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \vec{v}_3 = \vec{v}_1 + (\vec{v}_2 + \vec{v}_3), \quad (1.10)$$

unde  $\vec{v}_3$  este un alt vector din mulțimea  $V_3$ .

Operația de înmulțire cu un scalar a vectorilor liberi din  $V_3$  este distributivă față de adunare:

$$\lambda(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \lambda\vec{v}_1 + \lambda\vec{v}_2. \quad (1.11)$$

Reprezentarea grafică a regulii paralelogramului la adunarea a doi vectori  $\vec{v}_1$  și  $\vec{v}_2$  este dată în figura următoare.

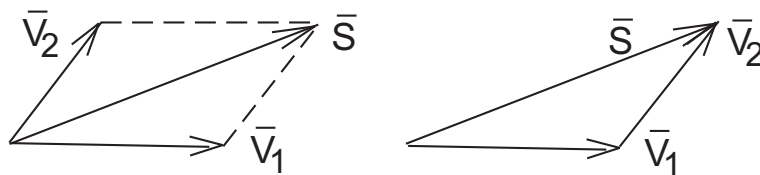


Figura I.1. Adunarea vectorilor liberi

În figură s-a reprezentat și varianta simplificată a regulii paralelogramului, numită *regula triunghiului*.

Dacă se adună mai mulți vectori liberi, regula triunghiului se extinde în *regula poligonului*. Se reprezintă vectorii pe o linie poligonală după direcțiile acestora. Fiecare vector, cu excepția primului, are originea în vârful vectorului anterior. Vectorul sumă  $\vec{s}$  se obține unind originea primului vector cu vârful ultimului vector. Pentru adunarea a trei vectori liberi avem

$$\vec{s} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3. \quad (1.12)$$

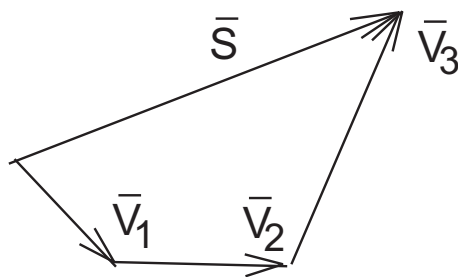


Figura I.2. Adunarea vectorilor liberi cu regula poligonului

În legătură cu regula poligonului se fac următoarele observații:

1. Ordinea de adunare a vectorilor este arbitrară, deoarece adunarea este comutativă și asociativă. Pentru aceeași sumă se pot construi mai multe poligoane.
2. Denumirea de regula poligonului este improprie, deoarece suporturile vectorilor se pot intersecta în mai multe puncte, caz în care suma este compusă din mai multe poligoane. De asemenea, dacă vectorii adunați nu sunt coplanari, figura obținută nu este un poligon plan.

Doi vectori liberi aparținând mulțimii  $V_3$  se numesc *opusi* dacă au același modul, aceeași direcție și sensuri opuse (contrare). Opusul unui vector  $\vec{v}$  este vectorul  $(-\vec{v})$ .

Dacă  $\vec{v}_1$  și  $\vec{v}_2$  sunt vectori aparținând mulțimii  $V_3$ , operația de scădere a vectorului  $\vec{v}_2$  din vectorul  $\vec{v}_1$  este echivalentă cu adunarea vectorului  $\vec{v}_1$  cu vectorul  $(-\vec{v}_2)$ :

$$\vec{d} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_1 + (-\vec{v}_2). \quad (1.13)$$

Reprezentarea grafică a regulii paralelogramului la scăderea vectorilor este dată în figura următoare:

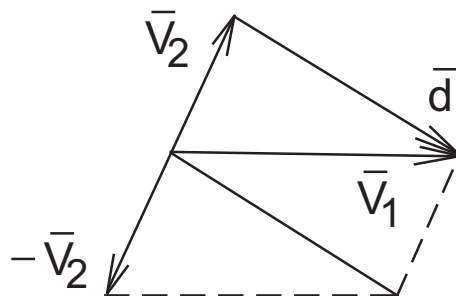


Figura I.3. Scăderea vectorilor liberi

Vectorul diferență  $\vec{d}$  se obține unind vârful vectorului scăzut  $\vec{v}_2$  cu vârful vectorului descăzut  $\vec{v}_1$ .

Se face observația că scăderea vectorilor nu este o operație independentă, fiind tot o adunare.

În afară de cele două operații care definesc structura de grup algebric abelian a spațiului vectorial  $V_3$  al vectorilor liberi, adunarea și înmulțirea cu un scalar, se mai definesc două operații. Acestea sunt produsul scalar și produsul vectorial, care au fost introduse din necesitățile de calcul ale mecanicii și fizicii.

Pentru definirea acestor operații se consideră doi vectori  $\vec{v}_1$  și  $\vec{v}_2$  aparținând mulțimii  $V_3$ .

*Produsul scalar* al vectorilor  $\vec{v}_1$  și  $\vec{v}_2$ , notat  $\vec{v}_1$  punct  $\vec{v}_2$ , este o mărime scalară egală cu produsul modulelor celor doi vectori și a cosinusului unghiului dintre aceștia:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cdot \cos \theta, \quad (1.14)$$

unde s-a notat  $\theta$  unghiul dintre vectorii  $\vec{v}_1$  și  $\vec{v}_2$ ,  $\theta = \sphericalangle(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ .

*Produsul vectorial* al vectorilor  $\vec{v}_1$  și  $\vec{v}_2$ , notat  $\vec{v}_1$  ori  $\vec{v}_2$ , este un vector  $\vec{p}$ :

$$\vec{p} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2, \quad (1.15)$$

definit prin următoarele proprietăți:

- modulul este egal cu produsul modulelor celor doi vectori și a sinusului unghiului dintre aceștia,

$$|\vec{p}| = |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cdot \sin \theta, \quad \theta \in [0^\circ, 180^\circ]; \quad (1.16)$$

- direcția este perpendiculară pe planul determinat de cei doi vectori, considerați cu originea în același punct,

$$\vec{p} \perp \vec{v}_1, \quad \vec{p} \perp \vec{v}_2; \quad (1.17)$$



- sensul este dat de regula burghiului drept sau regula mâinii drepte, adică diedrul  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{p})$  este drept orientat, la fel ca reperul triortogonal  $OXYZ$ .

*Regula burghiului* are următorul enunț:

*Se orientează burghiul perpendicular pe planul vectorilor și se rotește astfel ca primul vector al produsului ( $\vec{v}_1$ ) să se suprapună pe al doilea vector ( $\vec{v}_2$ ) printr-o rotație de unghi minim; sensul de înaintare al burghiului dă sensul vectorului produs  $\vec{p}$ .*

Operațiile de înmulțire scalară și de înmulțire vectorială prezintă următoarele proprietăți.

Produsul scalar este comutativ și distributiv în raport cu adunarea vectorilor:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 \quad (1.18)$$

$$\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3, \quad (1.19)$$

unde  $\vec{v}_3$  este un alt vector din mulțimea  $V_3$ .

Produsul vectorial este anticomutativ și distributiv în raport cu adunarea vectorilor:

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = -\vec{v}_2 \times \vec{v}_1 \quad (1.20)$$

$$\vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \times \vec{v}_3, \quad (1.21)$$

unde  $\vec{v}_3$  este un alt vector din mulțimea  $V_3$ .

În legătură cu produsul scalar și produsul vectorial se fac următoarele observații:

Dacă produsul scalar a doi vectori este nul, vectorii sunt perpendiculari:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0 \iff \vec{v}_1 \perp \vec{v}_2. \quad (1.22)$$

Dacă produsul vectorial a doi vectori este nul, vectorii sunt paraleli:

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \vec{0} \iff \vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2. \quad (1.23)$$

Un vector înmulțit scalar cu el însuși este egal cu pătratul modulului său. Un vector înmulțit vectorial cu el însuși este egal cu zero (vectorul zero):

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2, \quad \vec{v} \times \vec{v} = \vec{0}. \quad (1.24)$$

În plus față de cele patru operații de bază definite pe mulțimea vectorilor liberi  $V_3$ , se mai definesc două operații compuse. Pentru aceasta, se consideră trei vectori  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$  aparținând mulțimii  $V_3$ .

Dublul produs vectorial a trei vectori este un vector  $\vec{q}$  definit prin relația

$$\vec{q} = \vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3). \quad (1.25)$$

Formula de descompunere a dublului produs vectorial este cunoscută de la cursul de algebră ([5], [9]):

$$\vec{q} = (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3)\vec{v}_2 - (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)\vec{v}_3. \quad (1.26)$$

Produsul mixt a trei vectori este o mărime scalară definită prin relația

$$(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = \vec{p} \cdot \vec{v}_3, \quad \vec{p} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2, \quad (1.27)$$

unde  $\vec{p}$  este produsul vectorial al vectorilor  $\vec{v}_1$  și  $\vec{v}_2$ .

Produsul mixt are aceeași valoare absolută, indiferent de ordinea factorilor. Dacă se inversează doi factori, semnul produsului se schimbă:

$$(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = -(\vec{v}_1 \times \vec{v}_3) \cdot \vec{v}_2, \quad (1.28)$$

$$(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = -(\vec{v}_3 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_1. \quad (1.29)$$

Cele patru operații de bază cu vectori liberi, adunarea, înmulțirea cu un scalar, produsul scalar și produsul vectorial, la care se adaugă cele două operații compuse, dublul produs vectorial și produsul mixt, constituie baza calculului vectorial al mecanicii și al fizicii.

#### I.4. Proiecția unui vector pe o axă

Se consideră un vector  $\vec{v}$  și o axă  $(\Delta)$  de versor  $\vec{u}$ ,  $|\vec{u}| = 1$ . Se notează  $\theta$  unghiul dintre vectorul  $\vec{v}$  și versorul  $\vec{u}$ .

Se numește *proiecție* a vectorului  $\vec{v}$  pe axa  $(\Delta)$  mărimea scalară egală cu produsul dintre modulul vectorului  $\vec{v}$  și cosinusul unghiului dintre vectorul  $\vec{v}$  și versorul  $\vec{u}$ :

$$\text{pr}_{(\Delta)} \vec{v} = |\vec{v}| \cos \theta \quad (1.30)$$

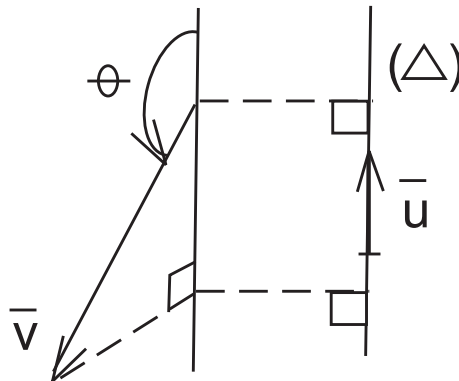


Figura I.4. Proiecția unui vector pe o axă

Conform definiției produsului scalar, avem:

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = |\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cos \theta = |\vec{v}| \cos \theta, \quad (1.31)$$

ceea ce permite scrierea egalității

$$\text{pr}_{(\Delta)} \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}, \quad (1.32)$$

deci proiecția vectorului  $\vec{v}$  pe axa  $(\Delta)$  este egală cu produsul scalar dintre vector și versorul axei.

**Observație.** Proiecția este pozitivă dacă unghiul  $\theta$  este ascuțit și negativă dacă unghiul  $\theta$  este obtuz. Dacă  $\vec{v} \perp (\Delta)$ , proiecția este zero.

## I.5. Expresia analitică a unui vector

Se numește *bază* în spațiul vectorial  $V_3$  o mulțime compusă din trei vectori linear independenți ([10], [15]):

$$B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}. \quad (1.33)$$

La cursul de algebră s-a demonstrat că pentru orice vector  $\vec{v}$  aparținând mulțimii  $V_3$  există trei mărimi scalare  $a_1, a_2, a_3$ , unic determinate, numite coordonatele vectorului în baza  $B$ , pentru care avem

$$\vec{v} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3. \quad (1.34)$$

Se consideră un reper triortogonal  $OXYZ$  atașat spațiului vectorial  $V_3$  și se notează  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  versorii axelor de coordonate, vectori de modul egal cu unitatea care precizează sensurile pozitive ale axelor  $OX, OY, OZ$ .

Versorii  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  constituie o bază ortonormată în spațiul vectorial  $V_3$ , adică avem:

$$\begin{aligned} |\vec{i}| = 1, \quad |\vec{j}| = 1, \quad |\vec{k}| = 1, \\ \vec{i} \cdot \vec{j} = 0, \quad \vec{j} \cdot \vec{k} = 0, \quad \vec{i} \cdot \vec{k} = 0. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Pentru orice vector  $\vec{v}$  aparținând mulțimii  $V_3$  se poate scrie expresia analitică în reperul  $OXYZ$  sub forma

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}, \quad (1.36)$$

unde  $v_x, v_y, v_z$  sunt coordonatele vectorului în baza ortonormată  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Coordonatele  $v_x, v_y, v_z$  se mai numesc *componentele scalare* ale vectorului  $\vec{v}$  și reprezintă proiecțiile vectorului pe axele de coordonate:

$$v_x = \vec{v} \cdot \vec{i}, \quad v_y = \vec{v} \cdot \vec{j}, \quad v_z = \vec{v} \cdot \vec{k}. \quad (1.37)$$

Modulul vectorului este dat de relația

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (1.38)$$

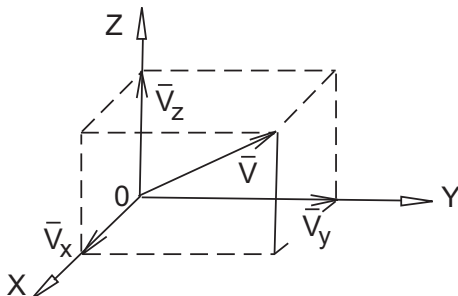


Figura I.5. Descompunerea unui vector în baza ortonormată

Componentele vectoriale ale vectorului  $\vec{v}$  în baza ortonormată  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  sunt

$$\vec{v}_x = v_x \vec{i}, \quad \vec{v}_y = v_y \vec{j}, \quad \vec{v}_z = v_z \vec{k}, \quad (1.39)$$

trei vectori coliniari cu axele de coordonate a căror adunare are ca rezultat vectorul  $\vec{v}$ :

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z. \quad (1.40)$$

## I.6. Extinderea operațiilor cu vectori de pe mulțimea vectorilor liberi

Toate cele patru operații de bază definite pe mulțimea vectorilor liberi se aplică și pentru celelalte două categorii de vectori, alunecători și legați.

Înmulțirea cu un scalar este o operație care se aplică pentru toate categoriile de vectori: liberi, alunecători și legați. Rezultatul este un vector de aceeași natură, cu unele excepții. În mecanica clasică, rezultatul înmulțirii unui vector cu o mărime scalară nu este neapărat un vector de aceeași natură (categorie). Ca exemplu se dă forța de greutate a unui corp solid,  $\vec{G} = m\vec{g}$ , unde accelerația gravitațională  $\vec{g}$  este vector liber și greutatea  $\vec{G}$  este vector legat de centrul de greutate.

Adunarea vectorilor este o operație care se aplică numai între vectori de aceeași categorie. Se pot aduna doi sau mai mulți vectori liberi, vectori alunecători cu suporturi concurente (care se intersectează) în același punct sau vectori legați de același punct. Rezultatul este un vector de aceeași natură: un vector liber, un vector alunecător al cărui suport conține punctul de concurență, respectiv un vector legat de același punct ca vectorii adunați.

Există și excepții de la aceste reguli, impuse de necesitățile de calcul analitic. De exemplu, suma a doi vectori alunecători cu suporturi neconcurente și neparalele se definește în mod convențional ca vector liber în cazul calculării rezultantei a două forțe. De asemenea, se definește și suma vectorilor legați de puncte diferite, de exemplu, în cazul calculării centrelor de greutate.

La adunarea vectorilor alunecători cu suporturi concurente în același punct și a vectorilor legați de același punct se aplică regula paralelogramului, respectiv regula poligonului dacă se adună mai mult de doi vectori, ca și la adunarea vectorilor liberi.

Punctul din care începe construcția poligonului este punctul de concurență al suporturilor în cazul adunării vectorilor alunecători, respectiv punctul comun de aplicație în cazul adunării vectorilor legați. Numai primul vector al sumei, ales arbitrar, este pe suportul său, pentru ceilalți vectori fiind construite suporturi paralele (suporturi aparente). În afară de primul vector al poligonului, ceilalți vectori sunt vectori echipolenți cu vectorii dați, adică vectori paraleli, având același modul și același sens.

Reprezentarea grafică a regulii poligonului la adunarea vectorilor alunecători concurenți sau a vectorilor legați de același punct este dată în figura următoare:

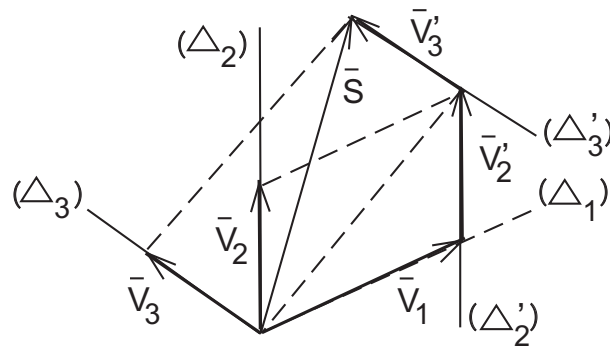


Figura I.6. Adunarea vectorilor alunecători concurenți sau a vectorilor legați cu regula poligonului

Pentru adunarea a trei vectori alunecători cu suporturi concurente sau a trei vectori legați de același punct, vectorul sumă este

$$\vec{s} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \quad (1.41)$$

respectiv

$$\vec{s} = \vec{v}_1 + \vec{v}'_2 + \vec{v}'_3, \quad (1.42)$$

unde  $\vec{v}'_2$  este un vector paralel cu  $\vec{v}_2$ , având același modul și același sens, iar  $\vec{v}'_3$  este un vector paralel cu  $\vec{v}_3$ , de același modul și același sens.

Produsul scalar și produsul vectorial sunt operații care se aplică între vectori de aceeași categorie sau de categorii diferite. Rezultatul produsului scalar a doi vectori este o mărime scalară, iar rezultatul produsului vectorial este un vector de aceeași categorie (clasă) cu unul dintre vectorii factori.

## I.7. Expresiile analitice ale operațiilor cu vectori

Pentru a prezenta expresiile analitice ale operațiilor cu vectori se consideră doi vectori liberi  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  aparținând mulțimii  $V_3$ . Se raportează acești vectori la un reper triortogonal  $OXYZ$  cu versorii axelor de coordonate  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , atașat mulțimii  $V_3$ .

Expresiile analitice ale vectorilor  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  în reperul  $OXYZ$  sunt

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}, \quad (1.43)$$

unde  $a_x, a_y, a_z$  sunt componentele scalare ale vectorului  $\vec{a}$ , iar  $b_x, b_y, b_z$  sunt componentele scalare ale vectorului  $\vec{b}$ .

Operațiile de bază în calculul vectorial sunt înmulțirea cu un scalar, adunarea, produsul scalar și produsul vectorial.

**1. Înmulțirea cu un scalar.** Prin înmulțirea vectorului  $\vec{a}$  cu un scalar  $\lambda$  se obține vectorul  $\vec{v}$  dat de relația

$$\vec{v} = \lambda \vec{a}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (1.44)$$

având aceeași direcție cu vectorul  $\vec{a}$ , același sens dacă  $\lambda$  este pozitiv, sens contrar dacă  $\lambda$  este negativ.

Relația între modulele vectorilor este

$$|\vec{v}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}| = \begin{cases} \lambda|\vec{a}|, & \text{pentru } \lambda > 0, \\ -\lambda|\vec{a}|, & \text{pentru } \lambda < 0. \end{cases} \quad (1.45)$$

Expresia analitică a vectorului produs este

$$\vec{v} = \lambda a_x \vec{i} + \lambda a_y \vec{j} + \lambda a_z \vec{k}, \quad (1.46)$$

având componentele scalare

$$v_x = \lambda a_x, \quad v_y = \lambda a_y, \quad v_z = \lambda a_z. \quad (1.47)$$

**2. Adunarea vectorilor.** Prin adunarea vectorului  $\vec{a}$  cu vectorul  $\vec{b}$  se obține vectorul sumă  $\vec{s}$  dat de relația

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}, \quad (1.48)$$

care se obține grafic prin regula paralelogramului.

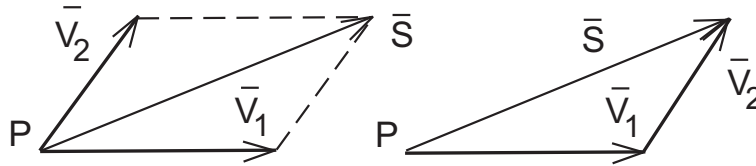


Figura I.7. Regula paralelogramului la adunarea vectorilor

**Observație.** În cazul adunării vectorilor liberi punctul  $P$  este arbitrar, în cazul adunării vectorilor alunecători concurenți punctul  $P$  este punctul de intersecție al suporturilor, respectiv punctul de legătură în cazul adunării vectorilor legați.

Expresia analitică a vectorului sumă este

$$\vec{s} = (a_x + b_x) \vec{i} + (a_y + b_y) \vec{j} + (a_z + b_z) \vec{k}, \quad (1.49)$$

având componentele scalare

$$s_x = a_x + b_x, \quad s_y = a_y + b_y, \quad s_z = a_z + b_z. \quad (1.50)$$

Operația de adunare a vectorilor este comutativă și asociativă:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}, \quad (1.51)$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}), \quad (1.52)$$

unde  $\vec{c}$  este un alt vector din mulțimea  $V_3$ .

**3. Produsul scalar.** Prin înmulțirea scalară a vectorului  $\vec{a}$  cu vectorul  $\vec{b}$  se obține un scalar egal cu produsul modulelor celor doi vectori și a cosinusului unghiului dintre vectori:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}). \quad (1.53)$$

Expresia analitică de calcul a produsului scalar este ([5], [9], [24]):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (1.54)$$

Produsul scalar este comutativ și distributiv în raport cu operația de adunare a vectorilor:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}, \quad (1.55)$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}, \quad (1.56)$$

unde  $\vec{c}$  este un alt vector din mulțimea  $V_3$ .

Conform definiției, produsele scalare ale versorilor axelor de coordonate sunt:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0. \quad (1.57)$$

**4. Produsul vectorial.** Prin înmulțirea vectorială a vectorului  $\vec{a}$  cu vectorul  $\vec{b}$  se obține un vector  $\vec{p}$  dat de relația

$$\vec{p} = \vec{a} \times \vec{b}, \quad (1.58)$$

care are modulul egal cu produsul modulelor celor doi vectori și a sinusului unghiului dintre vectori, direcția perpendiculară pe planul determinat de cei doi vectori și sensul dat de regula burghiului drept, adică diedrul  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{p})$  este drept orientat, la fel ca reperul triortogonal  $OXYZ$ .

Avem:

$$|\vec{p}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b}), \quad \vec{p} \perp \vec{a}, \quad \vec{p} \perp \vec{b}. \quad (1.59)$$

Expresia analitică de calcul a produsului vectorial este ([5], [9], [24]):

$$\vec{p} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}, \quad (1.60)$$

având componentele scalare

$$p_x = a_y b_z - a_z b_y, \quad p_y = a_z b_x - a_x b_z, \quad p_z = a_x b_y - a_y b_x, \quad (1.61)$$

expresie care se poate scrie sub forma următorului determinant algebric de ordinul trei:

$$\vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (1.62)$$

Produsul vectorial este anticomutativ și distributiv în raport cu adunarea vectorilor:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}, \quad (1.63)$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}, \quad (1.64)$$

unde  $\vec{c}$  este un alt vector din mulțimea  $V_3$ .

Conform definiției, produsele vectoriale ale versorilor axelor de coordonate sunt:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}, \quad \vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}, \quad \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}, \quad \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}. \quad (1.65)$$

Expresiile analitice de calcul ale produselor scalar și vectorial se demonstrează pe baza definițiilor acestora și sunt cunoscute de la cursul de algebră ([5], [9], [24]).

Produsul scalar și produsul vectorial prezintă următoarele consecințe, frecvent folosite în calculul vectorial.

Dacă produsul scalar a doi vectori este nul, atunci vectorii sunt perpendiculari (și reciproc):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}. \quad (1.66)$$

Dacă produsul vectorial a doi vectori este egal cu zero, atunci vectorii sunt paraleli (și reciproc):

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \iff \vec{a} \parallel \vec{b}. \quad (1.67)$$

Produsul scalar al unui vector cu el însuși este egal cu pătratul modulului sau a valorii sale algebrice. Produsul vectorial al unui vector cu el însuși este egal cu zero:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = a^2, \quad \vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}. \quad (1.68)$$

Se consideră un al treilea vector  $\vec{c}$  aparținând mulțimii  $V_3$ . Expresia analitică a vectorului  $\vec{c}$  în reperul  $OXYZ$  este

$$\vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}, \quad (1.69)$$

unde  $c_x, c_y, c_z$  sunt componentele scalare ale vectorului.

Operațiile compuse în calculul vectorial sunt dublul produs vectorial și produsul mixt a trei vectori.

**5. Dublul produs vectorial** a trei vectori este un vector  $\vec{q}$  dat de relația:

$$\vec{q} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}). \quad (1.70)$$

Formula de dezvoltare a dublului produs vectorial este

$$\vec{q} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}, \quad (1.71)$$

demonstrată la cursul de algebră ([5], [9], [24]).

Dublul produs vectorial este egal cu zero dacă și numai dacă vectorul  $\vec{a}$  este perpendicular pe planul determinat de vectorii  $\vec{b}$  și  $\vec{c}$  sau dacă vectorii  $\vec{b}$  și  $\vec{c}$  sunt paraleli.

**6. Produsul mixt** a trei vectori este un scalar dat de relația

$$w = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}). \quad (1.72)$$



Expresia analitică de calcul a produsului mixt este cunoscută sub forma unui determinant algebric de ordinul trei având pe linii componentele scalare ale vectorilor în ordinea factorilor din produs ([5], [9], [24]):

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (1.73)$$

Produsul mixt nu se modifică dacă vectorii factori  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  sunt permutați circular, adică

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}). \quad (1.74)$$

Dacă se inversează ordinea a doi factori, produsul mixt are aceeași valoare absolută cu semn schimbat:

$$-\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -\vec{c} \cdot (\vec{b} \times \vec{a}). \quad (1.75)$$

Produsul mixt a trei vectori este nul în următoarele condiții:

- dacă cei trei vectori sunt coplanari,
- dacă doi vectori sunt paraleli.

## I.8. Momentul polar al unui vector alunecător

Se consideră un vector alunecător  $\vec{v}$  cu dreapta suport ( $\Delta$ ) raportat la un reper triortogonal  $OXYZ$ . Se numește *moment polar* al vectorului  $\vec{v}$  în raport cu polul  $O$  un vector care este egal cu produsul vectorial dintre vectorul de poziție al unui punct de pe suportul ( $\Delta$ ) în raport cu polul  $O$  și vectorul dat. Se notează  $\vec{M}_O(\vec{v})$  :

$$\vec{M}_O(\vec{v}) = \vec{r} \times \vec{v}, \quad (1.76)$$

unde  $\vec{r} = \vec{OP}$ ,  $P \in (\Delta)$ .

Momentul polar nu depinde de alegerea punctului de pe suport,  $P \in (\Delta)$ . Considerând un alt punct  $P_1 \in (\Delta)$ , se scrie următoarea relație vectorială între punctele  $O, P$  și  $P_1$  (legea de variație a coordonatelor la translația axelor):

$$\vec{OP}_1 = \vec{OP} + \vec{PP}_1, \quad \vec{r}_1 = \vec{r} + \vec{PP}_1. \quad (1.77)$$

Avem

$$\begin{aligned} \vec{M}'_O(\vec{v}) &= \vec{r}_1 \times \vec{v} = \vec{OP}_1 \times \vec{v} = (\vec{OP} + \vec{PP}_1) \times \vec{v} \\ \vec{M}'_O(\vec{v}) &= \vec{OP} \times \vec{v} + \vec{PP}_1 \times \vec{v} = \vec{OP} \times \vec{v} = \vec{r} \times \vec{v} = \vec{M}_O(\vec{v}), \end{aligned} \quad (1.78)$$

deoarece vectorii  $\vec{PP}_1$  și  $\vec{v}$  sunt coliniari, produsul vectorial fiind egal cu zero.

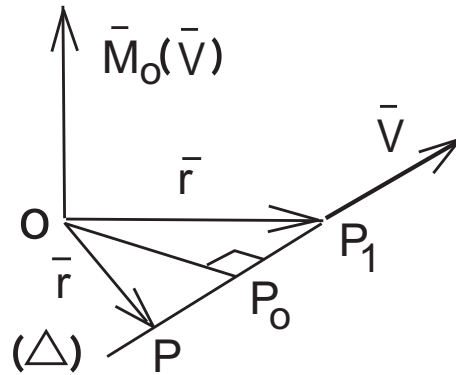


Figura I.8. Momentul polar al unui vector alunecător

Se construiește  $OP_0 \perp (\Delta)$ ,  $P_0 \in (\Delta)$  și se notează  $b = OP_0$ , segment numit *brațul* vectorului  $\vec{v}$ . Modulul momentului polar este

$$|\vec{M}_O(\vec{v})| = |\vec{r}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin(\vec{r}, \vec{v}) = b \cdot |\vec{v}|, \quad (1.79)$$

deoarece în triunghiul dreptunghic  $OP_0P$  se verifică relația

$$b = |\vec{r}| \cdot \sin(\vec{r}, \vec{v}). \quad (1.80)$$

Relația (1.79) pune în evidență că locul geometric al punctelor din spațiu în raport cu care vectorul are același moment polar este o dreaptă paralelă cu suportul vectorului care conține punctul  $O$ .

## I.9. Legea de variație a momentului polar la schimbarea polului

Se consideră un alt punct  $Q$ , diferit de  $O$ , și se definește momentul polar al vectorului  $\vec{v}$  în raport cu polul  $Q$ :

$$\vec{M}_Q(\vec{v}) = \vec{r}' \times \vec{v}, \quad (1.81)$$

unde  $\vec{r}' = \vec{QP}'$ ,  $P' \in (\Delta)$ .

Între punctele  $O, P$  și  $P'$  se scrie următoarea relație vectorială (legea de variație a coordonatelor la translația axelor):

$$\vec{OP} = \vec{OQ} + \vec{QP}' + \vec{P'P}, \quad \vec{r} = \vec{OQ} + \vec{r}' + \vec{P'P}. \quad (1.82)$$

Înlocuind în relația momentului polar în raport cu polul  $O$  ((1.76)), se obține

$$\begin{aligned} \vec{M}_O(\vec{v}) &= \vec{r} \times \vec{v} = \vec{OP} \times \vec{v} \\ \vec{M}_O(\vec{v}) &= (\vec{OQ} + \vec{QP}' + \vec{P'P}) \times \vec{v} \\ \vec{M}_O(\vec{v}) &= \vec{OQ} \times \vec{v} + \vec{r}' \times \vec{v} + \vec{P'P} \times \vec{v}, \end{aligned} \quad (1.83)$$

relație care se scrie sub forma

$$\vec{M}_O(\vec{v}) = \vec{M}_Q(\vec{v}) + \vec{OQ} \times \vec{v}, \quad (1.84)$$

ultimul produs vectorial fiind egal cu zero între vectori coliniari.

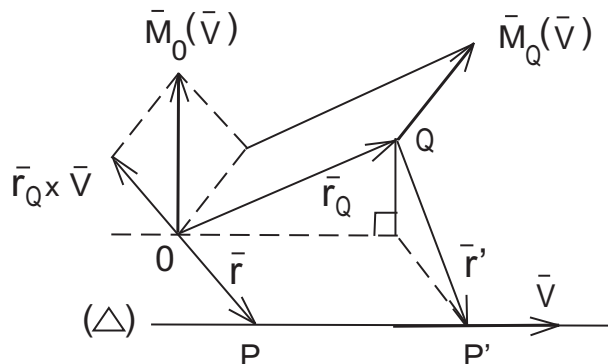


Figura I.9. Variația momentului polar la schimbarea polului

Notând  $\vec{r}_Q = \vec{OQ}$  vectorul de poziție al punctului  $Q$  în raport cu  $O$ , relația se scrie

$$\vec{M}_O(\vec{v}) = \vec{M}_Q(\vec{v}) + \vec{r}_Q \times \vec{v}, \quad (1.85)$$

și este cunoscută ca legea de variație a momentului polar la schimbarea polului.

Expresia analitică de calcul a momentului polar se scrie în condițiile în care este cunoscută expresia analitică a vectorului  $\vec{v}$ :

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \quad (1.86)$$

și coordonatele punctului de pe suport  $P$ :

$$P(x, y, z) \in (\Delta) \quad (1.87)$$

în reperul  $OXYZ$  considerat.

Avem, conform definiției, din (1.76), (1.86) și (1.87):

$$\vec{M}_O(\vec{v}) = \vec{r} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \quad (1.88)$$

$$\vec{M}_O(\vec{v}) = (y v_z - z v_y) \vec{i} + (z v_x - x v_z) \vec{j} + (x v_y - y v_x) \vec{k}. \quad (1.89)$$

Componentele scalare ale momentului polar sunt:

$$\begin{aligned} M_{Ox}(\vec{v}) &= y v_z - z v_y \\ M_{Oy}(\vec{v}) &= z v_x - x v_z \\ M_{Oz}(\vec{v}) &= x v_y - y v_x \end{aligned} \quad (1.90)$$

Momentul polar al unui vector alunecător are următoarele proprietăți:

1. Momentul polar este un vector legat de pol, perpendicular pe planul determinat de suportul vectorului și de pol.
2. Momentul polar este zero dacă și numai dacă este calculat în raport cu puncte de pe suportul vectorului.
3. Momentul polar are aceeași valoare dacă se calculează în raport cu puncte de pe o dreaptă paralelă cu suportul vectorului.
4. La schimbarea polului din  $O$  și  $Q$ , momentul polar se modifică după legea

$$\vec{M}_O(\vec{v}) = \vec{M}_Q(\vec{v}) + \vec{r}_Q \times \vec{v}, \quad \vec{r}_Q = \overrightarrow{OQ}. \quad (1.91)$$

Momentul polar este complet determinat de șase mărimi scalare: componentele scalare  $v_x, v_y, v_z$  ale vectorului și coordonatele  $x, y, z$  ale punctului de pe suport.

Vectorul alunecător  $\vec{v}$  este complet determinat dacă se cunosc cele trei componente scalare ale sale  $v_x, v_y, v_z$  și momentul său în raport cu polul  $O$ ,  $\vec{M}_O(\vec{v})$ , care are, de asemenea, trei componente scalare (relațiile (1.90)). Aceste șase mărimi scalare se numesc *coordonatele lui Plucker*:

$$(v_x, v_y, v_z, M_{Ox}(\vec{v}), M_{Oy}(\vec{v}), M_{Oz}(\vec{v})), \quad (1.92)$$

sau *coordonatele pluckeriene* ale vectorului  $\vec{v}$  ([3], [22]).

## I.10. Determinarea suportului unui vector alunecător în funcție de momentul polar

Dacă un vector alunecător este dat prin expresia analitică în reperul triortogonal  $OXYZ$

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \quad (1.93)$$

și se cunoaște momentul său în raport cu polul  $O$ ,  $\vec{M}_O(\vec{v})$ , adică dacă vectorul este dat prin coordonatele pluckeriene, se pune problema determinării suportului, notat  $(\Delta)$ .

Pentru aceasta se consideră relația de definiție a momentului polar (1.76)

$$\vec{M}_O(\vec{v}) = \vec{r} \times \vec{v},$$

care se înmulțește vectorial la stânga cu vectorul  $\vec{v}$ :

$$\vec{v} \times \vec{M}_O(\vec{v}) = \vec{v} \times (\vec{r} \times \vec{v}). \quad (1.94)$$

Aplicând formula de dezvoltare a dublului produs vectorial, se obține

$$\vec{v} \times \vec{M}_O(\vec{v}) = \vec{v}^2 \cdot \vec{r} - (\vec{v} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{v}, \quad (1.95)$$

de unde rezultă

$$\vec{r} = \frac{\vec{v} \times \vec{M}_O(\vec{v})}{v^2} + \left( \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{|\vec{v}|^2} \right) \vec{v},$$

sau încă

$$\vec{r} = \frac{\vec{v} \times \vec{M}_O(\vec{v})}{v^2} + \left( \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{|\vec{v}|} \right) \cdot \vec{u}, \quad (1.96)$$

unde s-a notat versorul vectorului

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}. \quad (1.97)$$

Se observă că primul termen din (1.96) reprezintă vectorul de poziție în raport cu polul  $O$  al punctului  $P_0 \in (\Delta)$ ,  $OP_0 \perp (\Delta)$ , unde  $(\Delta)$  este dreapta suport a vectorului  $\vec{v}$ :

$$\vec{r}_0 = \overrightarrow{OP_0} = \frac{\vec{v} \times \vec{M}_O(\vec{v})}{v^2}, \quad |\vec{r}_0| = \frac{|\vec{M}_O(\vec{v})|}{|\vec{v}|} = OP_0 = b, \quad (1.98)$$

unde  $b$  este brațul vectorului, definit în (1.79), iar al doilea termen din (1.96) reprezintă proiecția vectorului de poziție  $\vec{r}$  pe suportul vectorului  $\vec{v}$ :

$$\text{pr}_{\vec{v}} \vec{r} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{|\vec{v}|} = \vec{r} \cdot \vec{u}. \quad (1.99)$$

Cu acestea, relația (1.96) se scrie sub forma unei ecuații vectoriale cu o infinitate de soluții  $\vec{r}$ :

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{u} \cdot \text{pr}_{\vec{v}} \vec{r}, \quad \vec{r}_0 \perp \vec{v}, \quad (1.100)$$

având reprezentarea grafică dată în figura următoare:

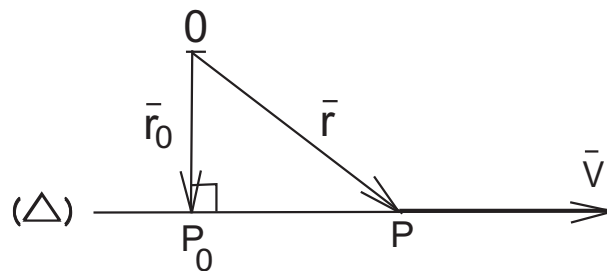


Figura I.10. Suportul vectorului  $\vec{v}$

În Figura I.10, segmentul  $P_0P$  reprezintă proiecția vectorului  $\vec{r}$  pe suportul vectorului  $\vec{v}$ :

$$\overrightarrow{P_0P} = (\text{pr}_{\vec{v}} \vec{r}) \cdot \vec{u}. \quad (1.101)$$

Notând  $\lambda' = \text{pr}_{\vec{v}} \vec{r}$ , parametru real, ecuația (1.100) se scrie sub forma

$$(\Delta) : \vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda' \cdot \vec{u}, \quad \lambda' \in \mathbb{R}, \quad (1.102)$$

și reprezintă ecuația vectorială a suportului vectorului  $\vec{v}$ .

Introducând în (1.102) vectorul  $\vec{r}_0$  și versorul  $\vec{u}$  (relațiile (1.98), respectiv (1.97)), se obține pentru suportul vectorului  $\vec{v}$  ecuația:

$$(\Delta) : \vec{r} = \frac{\vec{v} \times \vec{M}_O(\vec{v})}{v^2} + \lambda \cdot \vec{v}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (1.103)$$

unde  $\lambda$  este un parametru real ( $\lambda = \lambda'/|\vec{v}'|$ ).

Înlocuind în relația (1.103) componentele scalare ale vectorilor  $\vec{v}$  și  $\vec{M}_O(\vec{v})$ , conform relațiilor (1.86) și (1.90), rezultă următoarele coordonate ale unui punct arbitrar  $P$  al suportului vectorului  $\vec{v}$ :

$$\begin{aligned} x &= \frac{v_y \cdot M_{Oz}(\vec{v}) - v_z \cdot M_{Oy}(\vec{v})}{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} + \lambda \cdot v_x, \\ y &= \frac{v_z \cdot M_{Ox}(\vec{v}) - v_x \cdot M_{Oz}(\vec{v})}{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} + \lambda \cdot v_y, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ z &= \frac{v_x \cdot M_{Oy}(\vec{v}) - v_y \cdot M_{Ox}(\vec{v})}{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} + \lambda \cdot v_z, \end{aligned} \quad (1.104)$$

unde  $\lambda$  este un parametru real, iar  $M_{Ox}(\vec{v})$ ,  $M_{Oy}(\vec{v})$ ,  $M_{Oz}(\vec{v})$  sunt date de relațiile (1.90).

Se face observația că momentul polar se calculează și pentru vectori legați:

$$\vec{M}_O(\vec{v}) = \vec{r} \times \vec{v}, \quad \vec{r} = \overrightarrow{OP}, \quad (1.105)$$

în acest caz punctul  $P$  fiind punctul de aplicație al vectorului legat  $\vec{v}$ .

## I.11. Momentul axial al unui vector alunecător

Se consideră un vector alunecător  $\vec{v}$  cu dreapta suport  $(\Delta_v)$  și o axă  $(\Delta)$  care nu este coplanară cu suportul vectorului  $\vec{v}$ . Se notează  $\vec{u}$  versorul axei  $(\Delta)$ .

Se numește *moment axial* al vectorului  $\vec{v}$  în raport cu axa  $(\Delta)$  proiecția pe axa  $(\Delta)$  a momentului polar al vectorului  $\vec{v}$  calculat în raport cu un punct  $Q$  aparținând axei  $(\Delta)$ . Se notează  $M_\Delta(\vec{v})$  și este o mărime scalară. Conform regulii de proiecție a unui vector pe o axă, momentul axial este egal cu produsul scalar dintre versorul axei și momentul vectorului calculat în raport cu un punct de pe axă:

$$M_\Delta(\vec{v}) = \text{pr}_\Delta \vec{M}_Q(\vec{v}) = \vec{u} \cdot (\vec{r} \times \vec{v}), \quad (1.106)$$

unde  $\vec{r} = \overrightarrow{QP}$ ,  $Q \in (\Delta)$  și  $P \in (\Delta_v)$ , alegerea punctelor  $Q$  și  $P$  fiind arbitrară.

Momentul axial se calculează ca un produs mixt între versorul axei, vectorul de poziție al unui punct de pe suportul vectorului în raport cu un punct de pe axă și vectorul dat.

Momentul axial nu depinde de alegerea punctului  $Q$  pe axa  $(\Delta)$ . Considerând un alt punct  $Q'$  aparținând axei  $(\Delta)$ ,  $Q' \in (\Delta)$ , se scrie următoarea relație vectorială între punctele  $Q, P$  și  $Q'$  (legea de variație a coordonatelor la translația axelor):

$$\overrightarrow{Q'P} = \overrightarrow{Q'Q} + \overrightarrow{QP}, \quad \vec{r} = \overrightarrow{Q'Q} + \vec{r} \quad (1.107)$$

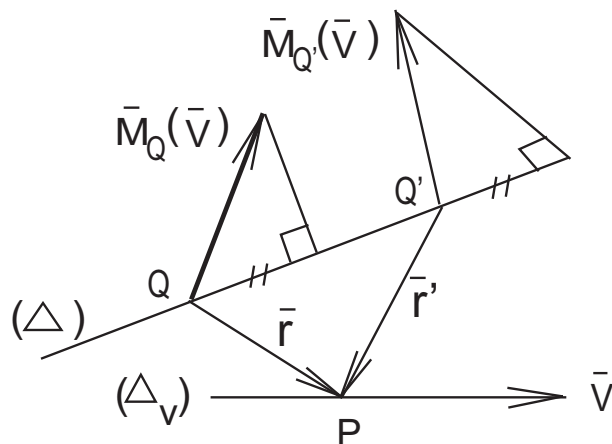


Figura I.11. Momentul axial al unui vector alunecător

Se calculează

$$M'_{\Delta}(\vec{v}) = \vec{u} \cdot (\vec{r}' \times \vec{v}) = \vec{u} \cdot ((\overrightarrow{Q'Q} + \vec{r}) \times \vec{v})$$

și se obține

$$M'_{\Delta}(\vec{v}) = \vec{u} \cdot (\overrightarrow{Q'Q} \times \vec{v}) + \vec{u} \cdot (\vec{r} \times \vec{v}) = M_{\Delta}(\vec{v}), \quad (1.108)$$

deoarece primul produs mixt este nul, având doi vectori coliniari.

Momentul axial al unui vector alunecător are următoarele proprietăți:

1. Momentul axial nu depinde de alegerea punctului de pe axa de proiecție  $(\Delta)$ .
2. Momentul axial este zero dacă și numai dacă dreapta suport a vectorului  $(\Delta_v)$  și axa de proiecție  $(\Delta)$  sunt coplanare (concurrente sau paralele).

Dacă se cunoaște perpendiculara comună între axa  $(\Delta)$  și suportul vectorului  $\vec{v}$ , notată  $Q_0P_0$ :

$$Q_0 \in (\Delta), P_0 \in (\Delta_v), Q_0P_0 \perp (\Delta), Q_0P_0 \perp (\Delta_v), \quad (1.109)$$

vectorul  $\vec{v}$  se poate descompune în două componente în punctul  $P_0$ :

- o componentă paralelă cu axa  $(\Delta)$ , notată  $\vec{v}_p$ ,
- o componentă normală la axa  $(\Delta)$ , notată  $\vec{v}_n$ ,

$$\vec{v} = \vec{v}_p + \vec{v}_n.$$

În acest caz, momentul axial al vectorului  $\vec{v}$  în raport cu axa  $(\Delta)$  se scrie  $M_{\Delta}(\vec{v}) = \vec{u} \cdot (\overrightarrow{Q_0P_0} \times \vec{v}) = \vec{u} \cdot (\overrightarrow{Q_0P_0} \times (\vec{v}_p + \vec{v}_n)) = \vec{u} \cdot (\overrightarrow{Q_0P_0} \times \vec{v}_p) + \vec{u} \cdot (\overrightarrow{Q_0P_0} \times \vec{v}_n)$

$$M_{\Delta}(\vec{v}) = \vec{u} \cdot (\overrightarrow{Q_0P_0} \times \vec{v}_n) \quad (1.110)$$

deoarece primul produs mixt este zero, având doi vectori paraleli.

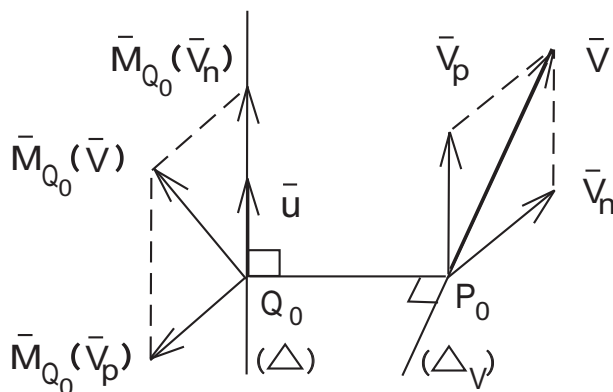


Figura I.12. Momentul axial exprimat cu perpendiculara comună

Notând  $d$  lungimea perpendicularei comune  $Q_0P_0$ ,  $d = Q_0P_0$  și  $\alpha$  unghiul dintre axa  $(\Delta)$  și suportul vectorului  $\vec{v}$ ,  $\alpha = \sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})$ , avem

$$|\vec{v}_n| = |\vec{v}| \cdot \sin \alpha, \quad |\overrightarrow{Q_0P_0} \times \vec{v}_n| = d \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \alpha, \quad (1.111)$$

deoarece  $\overrightarrow{Q_0P_0} \perp \vec{v}_n$ .

Se observă că relația (1.110) reprezintă un produs scalar între doi vectori coliniari. Cu acestea, momentul axial al vectorului  $\vec{v}$  în raport cu axa  $(\Delta)$  se scrie

$$M_{\Delta}(\vec{v}) = \pm d \cdot |\vec{v}| \sin \alpha, \quad (1.112)$$

unde  $d$  este lungimea perpendicularei comune dintre axa  $(\Delta)$  și suportul  $(\Delta_v)$ , iar  $\alpha$  este unghiul dintre versorul  $\vec{u}$  și vectorul  $\vec{v}$ , unghi cuprins între  $0^\circ$  și  $180^\circ$ .

Momentul axial este zero pentru  $\alpha = 0^\circ$  și  $\alpha = 180^\circ$  sau pentru  $d = 0$ .

În relația (1.112) se ia semnul (+) dacă vectorii  $\overrightarrow{Q_0P_0}$ ,  $\vec{v}_n$  și  $\vec{u}$  (în această ordine) din relația (1.110) formează un triedru drept orientat, la fel ca reperul triortogonal  $OXYZ$  și semnul (–) dacă acești vectori formează un triedru stâng orientat.

În conformitate cu definiția momentului axial, relațiile (1.90), care dau componentele scalare ale momentului polar al vectorului  $\vec{v}$  în raport cu originea  $O$ , reprezintă momentele axiale ale vectorului  $\vec{v}$  în raport cu axele de coordonate  $OX, OY, OZ$ .

Se face observația că momentul axial se calculează și pentru vectori legați, la fel ca și momentul polar. În acest caz, punctul  $P$  din relația de definiție (1.106) este punctul de aplicație al vectorului legat  $\vec{v}$ .



## Capitolul II

### REDUCEREA SISTEMELOR DE VECTORI ALUNECĂTORI

#### II.1. Definiția sistemului de vectori alunecători

Modelul vectorilor alunecători corespunde acțiunii forțelor asupra corpurilor solide rigide (nedeformabile). O forță care acționează asupra unui corp solid rigid produce același efect indiferent de punctul de aplicație al forței pe dreapta suport, considerată fixă în raport cu corpul. Din acest motiv, forțele care acționează asupra unui corp solid rigid se prezintă ca vectori alunecători și se încadrează în această categorie de vectori.

Mai multe forțe care acționează asupra unui corp solid rigid formează un sistem de forțe. Dacă două sisteme diferite de forțe, acționând succesiv asupra unui solid rigid liber, aflat de fiecare dată în aceeași stare de mișcare, modifică identic starea de mișcare a corpului, atunci cele două sisteme sunt echivalente din punct de vedere al mișcării mecanice. Dacă două sisteme diferite de forțe, acționând succesiv asupra unui solid rigid imobilizat prin legături, determină aceleași reacțiuni în legăturile aplicate corpului, atunci cele două sisteme de forțe sunt echivalente din punct de vedere static. În cazul unei situații mixte, dacă rigidul este supus la legături fără a fi imobilizat, sistemele echivalente de forțe vor determina acționând succesiv aceleași reacțiuni în legăturile aplicate și aceeași modificare a stării de mișcare a corpului.

Transformarea unui sistem de forțe într-un sistem echivalent are ca scop simplificarea sistemului, adică înlocuirea acestuia cu un sistem mai simplu. Această operație se numește reducerea sistemului de forțe.

În continuare se va adopta denumirea de sistem de vectori alunecători (SVA) și se va înlocui notația de vectori  $\vec{v}$  din Capitolul I cu notația  $\vec{F}$  (forță).

**Definiția 2.1** Se numește *sistem de vectori alunecători* (SVA) o mulțime

$$S = \{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\}$$

de astfel de vectori (forțe), ale căror drepte suport  $(\Delta\mu)$ ,  $\mu = \overline{1, n}$ , sunt conținute într-un domeniu  $D$  al spațiului tridimensional, domeniu ce corespunde volumului unui corp solid rigid asupra căruia acționează sistemul de forțe.

## II.2. Rezultanta și momentul rezultant al unui sistem de vectori alunecători

Se consideră un sistem de vectori alunecători

$$S = \{\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n\} \quad (2.1)$$

cu drepte suport  $(\Delta\mu)$ ,  $\mu = \overline{1, n}$ , conținute într-un domeniu  $D$  al spațiului tridimensional ( $D \subset \mathbb{R}^3$ ).

Raportând domeniul de existență  $D$  al vectorilor la un reper triortogonal  $OXYZ$  se definesc două mărimi vectoriale caracteristice ale sistemului de vectori alunecători: vectorul rezultant (rezultanta) și momentul rezultant în raport cu un pol (în mod curent originea  $O$ ).

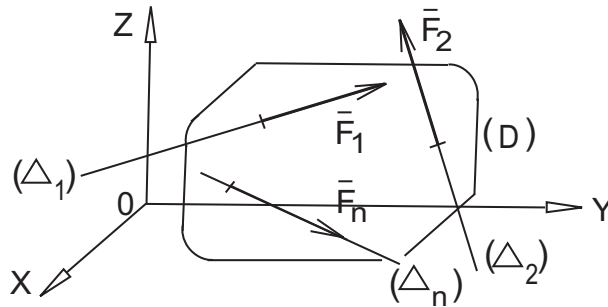


Figura II.1. Sistem de vectori alunecători

Rezultanta sistemului (vectorul rezultant) este definită ca sumă a vectorilor sistemului, notată  $\bar{R}$ :

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n = \sum_{\mu=1}^n \bar{F}_\mu. \quad (2.2)$$

**Observația 2.1** Adunarea (2.2) este o operație simbolică, vectorii se adună ca vectori liberi, rezultanta fiind un vector liber. Cazurile particulare de sisteme la care rezultanta este vector alunecător vor fi prezentate în continuare.

Momentul rezultant al sistemului în raport cu un pol oarecare  $Q$  este definit ca sumă vectorială a momentelor polare în raport cu polul  $Q$  ale vectorilor, notat  $\bar{\mathcal{M}}_Q$ :

$$\bar{\mathcal{M}}_Q = \bar{\mathcal{M}}_Q(\bar{F}_1) + \bar{\mathcal{M}}_Q(\bar{F}_2) + \dots + \bar{\mathcal{M}}_Q(\bar{F}_n) = \sum_{\mu=1}^n \bar{\mathcal{M}}_Q(\bar{F}_\mu), \quad (2.3)$$

unde  $\bar{\mathcal{M}}_Q(\bar{F}_\mu) = \overline{QB}_\mu \times \bar{F}_\mu$ ,  $B_\mu \in (\Delta\mu)$ ,  $\mu = \overline{1, n}$ .

În mod curent se va calcula momentul rezultant în raport cu polul  $O$  (în origine) al sistemului de vectori:

$$\bar{\mathcal{M}}_O = \bar{\mathcal{M}}_O(\bar{F}_1) + \bar{\mathcal{M}}_O(\bar{F}_2) + \dots + \bar{\mathcal{M}}_O(\bar{F}_n) = \sum_{\mu=1}^n \bar{\mathcal{M}}_O(\bar{F}_\mu), \quad (2.4)$$

unde  $\bar{\mathcal{M}}_O(\bar{F}_\mu) = \overline{OB}_\mu \times \bar{F}_\mu$ ,  $B_\mu \in (\Delta\mu)$ ,  $\mu = \overline{1, n}$ .

Între momentul rezultat în raport cu polul  $O$  și momentul rezultat în raport cu polul  $Q$  al sistemului se aplică legea de variație a momentului la schimbarea polului ((1.85)):

$$\overline{\mathcal{M}}_O = \overline{\mathcal{M}}_Q + \overline{r}_Q \times \overline{R}, \quad \overline{r}_Q = \overline{OQ}, \quad (2.5)$$

unde  $\overline{R}$  este rezultanta sistemului.

### II.3. Torsorul unui sistem de vectori alunecători

Se consideră un sistem de vectori alunecători

$$S = \{\overline{F}_1, \overline{F}_2, \dots, \overline{F}_n\} \quad (2.6)$$

cu dreptele suport  $(\Delta\mu)$ ,  $\mu = \overline{1, n}$ , conținute într-un domeniu  $D$  al spațiului tridimensional ( $D \subset \mathbb{R}^3$ ).

**Definiția 2.2** Se numește *torsor* în polul  $P$  al sistemului de vectori alunecători  $S$  mulțimea compusă din rezultantă și momentul rezultat în raport cu polul  $P$ , notată prin simbolul

$$T_P(S) = \{\overline{R}, \overline{\mathcal{M}}_P\}. \quad (2.7)$$

Dacă se raportează sistemul de vectori alunecători  $S$  la un reper triortogonal  $OXYZ$ , se va considera în mod curent torsorul în polul  $O$  al sistemului (originea reperului):

$$T_O(S) = \{\overline{R}, \overline{\mathcal{M}}_O\}, \quad (2.8)$$

unde rezultanta  $\overline{R}$  este dată de (2.2) și momentul rezultat în raport cu polul  $O$  este dat de (2.4).

### II.4. Invarianții scalari ai unui sistem de vectori alunecători

Invarianții unui sistem de vectori alunecători sunt mărimi scalare care nu se modifică dacă se calculează torsorul în raport cu alt punct.

Se consideră un sistem de vectori alunecători

$$S = \{\overline{F}_1, \overline{F}_2, \dots, \overline{F}_n\} \quad (2.9)$$

cu dreptele suport  $(\Delta\mu)$ ,  $\mu = \overline{1, n}$ , conținute într-un domeniu  $D$  al spațiului tridimensional ( $D \subset \mathbb{R}^3$ ).

Raportând sistemul  $S$  la un reper triortogonal  $OXYZ$ , torsorul în polul  $O$  (în origine) al sistemului este mulțimea compusă din rezultantă și momentul rezultat în raport cu polul  $O$ :

$$T_O(S) = \{\overline{R}, \overline{\mathcal{M}}_O\}. \quad (2.10)$$

Din punct de vedere al modului de calcul, forța rezultantă

$$\bar{R} = \sum_{\mu=1}^n \bar{F}_{\mu}$$

are proprietăți de vector liber, deoarece mărimea, direcția și sensul acesteia nu depind de punctul în raport cu care se calculează torsorul.

Prima mărime scalară invariantă a sistemului  $S$  este modulul rezultantei, care este același indiferent de sistemul de referință, adică de reperul  $OXYZ$ :

$$I_1 = |\bar{R}|. \quad (2.11)$$

Dacă se calculează momentul rezultat al sistemului  $S$  în raport cu alt pol, notat  $Q$ , relația între momentele rezultante  $\bar{\mathcal{M}}_O$  și  $\bar{\mathcal{M}}_Q$  este dată de legea de variație a momentelor la schimbarea polului (teorema momentelor (1.85)):

$$\bar{\mathcal{M}}_O = \bar{\mathcal{M}}_Q + \bar{r}_Q \times \bar{R}, \quad \bar{r}_Q = \overline{OQ}. \quad (2.12)$$

Momentul rezultat este un vector legat al cărui punct de aplicație are un grad de libertate, deoarece mărimea, direcția și sensul acestuia ( $\bar{\mathcal{M}}_Q$ ) nu se modifică dacă punctul  $Q$  se deplasează față de originea  $O$  paralel cu direcția forței rezultante ( $OQ \parallel \bar{R}$ ).

Torsorul în polul  $Q$  al sistemului  $S$  este

$$T_Q(S) = \{\bar{R}, \bar{\mathcal{M}}_Q\}. \quad (2.13)$$

Calculând produsul scalar dintre elementele torsorului în polul  $O$  (rezultanta  $\bar{R}$  și momentul rezultat  $\bar{\mathcal{M}}_O$ ) pe baza relației (2.12) se pune în evidență egalitatea

$$\begin{aligned} \bar{R} \cdot \bar{\mathcal{M}}_O &= \bar{R} \cdot (\bar{\mathcal{M}}_Q + \bar{r}_Q \times \bar{R}) = \bar{R} \cdot \bar{\mathcal{M}}_Q + \bar{R} \cdot (\bar{r}_Q \times \bar{R}) \\ \bar{R} \cdot \bar{\mathcal{M}}_O &= \bar{R} \cdot \bar{\mathcal{M}}_Q, \end{aligned} \quad (2.14)$$

deoarece un produs mixt cu doi factori identici este nul.

Această egalitate permite să se formuleze concluzia că a doua mărime scalară invariantă a sistemului  $S$  este produsul scalar dintre rezultantă și momentul rezultat, indiferent de polul în raport cu care este calculat:

$$I_2 = \bar{R} \cdot \bar{\mathcal{M}}_O. \quad (2.15)$$

Acest produs scalar se mai numește și scalarul torsorului ([12], [22]).

A treia mărime scalară invariantă a sistemului  $S$  este raportul primelor două (al doilea invariant împărțit la primul), raport care reprezintă proiecția momentului rezultat pe direcția rezultantei, conform relației (1.32) care exprimă proiecția unui vector pe o axă:

$$I_3 = \frac{I_2}{I_1} = \frac{\bar{R} \cdot \bar{\mathcal{M}}_O}{|\bar{R}|} = \bar{\mathcal{M}}_O \cdot \bar{u}_R = \text{pr}_{\bar{R}} \bar{\mathcal{M}}_O, \quad (2.16)$$

unde s-a notat  $\bar{u}_R$  versorul rezultantei.

**Observația 2.2** Relația (2.16) este valabilă indiferent de polul în raport cu care se calculează momentul rezultat.

## II.5. Sisteme simple de vectori alunecători

Una dintre operațiile de bază ale mecanicii clasice este înlocuirea sistemului de forțe aplicat unui corp solid rigid prin cel mai simplu sistem care produce același rezultat din punct de vedere al mișcării mecanice, adică cel mai simplu sistem echivalent. Operația prin care se înlocuiește un sistem de forțe (vectori alunecători) prin cel mai simplu sistem echivalent se numește reducere.

Reducerea unui sistem de forțe aplicat unui corp solid rigid, considerat ca sistem de vectori alunecători (SVA), constă în înlocuirea acestuia cu cel mai simplu sistem posibil care produce același efect din punct de vedere mecanic asupra corpului.

Există trei tipuri de sisteme simple de vectori alunecători:

- sistem format dintr-un singur vector alunecător (vector unic);
- sistem format din doi vectori alunecători paraleli, egali în modul și de sensuri contrare (cuplu de vectori);
- sistem format din doi vectori alunecători cu suporturi neconcurente și neparalele în spațiu (tossor propriu zis).

În cazul unui sistem oarecare de vectori alunecători  $S$  raportat la un reper tri-ortogonal  $OXYZ$  se pune problema stabilirii sistemului simplu cu care acesta este echivalent, adică care conduce la același rezultat din punct de vedere mecanic asupra unui corp solid rigid. Pentru aceasta se stabilesc prin calcul caracteristicile sistemului de vectori alunecători  $S$  în raport cu reperul considerat.

**Definiția 2.3** Se numesc *caracteristici* ale unui sistem de vectori alunecători (SVA) într-un reper  $OXYZ$  rezultanta, momentul rezultat în raport cu originea și produsul scalar dintre rezultantă și momentul rezultat (al doilea invariant scalar sau scalarul tursorului):

$$\bar{R}, \bar{\mathcal{M}}_O \text{ și } I_2 = \bar{R} \cdot \bar{\mathcal{M}}_O. \quad (2.17)$$

În cazul unui sistem oarecare de vectori alunecători  $S$  raportat la un reper  $OXYZ$ , operația de reducere, înlocuirea sistemului cu cel mai simplu sistem echivalent, constă efectiv în calcularea tursorului într-un pol oarecare, în particular polul  $O$ , originea reperului la care este raportat sistemul:

$$T_O(S) = \{\bar{R}, \bar{\mathcal{M}}_O\}. \quad (2.18)$$

Dacă se calculează tossorul sistemului de vectori alunecători  $S$  în alt punct  $Q$ , diferit de  $O$ :

$$T_Q(S) = \{\bar{R}, \bar{\mathcal{M}}_Q\}, \quad (2.19)$$

se pot enunța trei concluzii în legătură cu proprietățile tursorului la schimbarea polului:

– vectorul rezultat ( $\bar{R}$ ) nu se modifică;

– momentul rezultat se modifică după relația

$$\bar{\mathcal{M}}_O = \bar{\mathcal{M}}_Q + \bar{r}_Q \times \bar{R}, \quad \bar{r}_Q = \overline{OQ}; \quad (2.20)$$

– produsul scalar dintre vectorul rezultat și momentul rezultat nu se modifică:

$$\bar{R} \cdot \bar{\mathcal{M}}_O = \bar{R} \cdot \bar{\mathcal{M}}_Q. \quad (2.21)$$

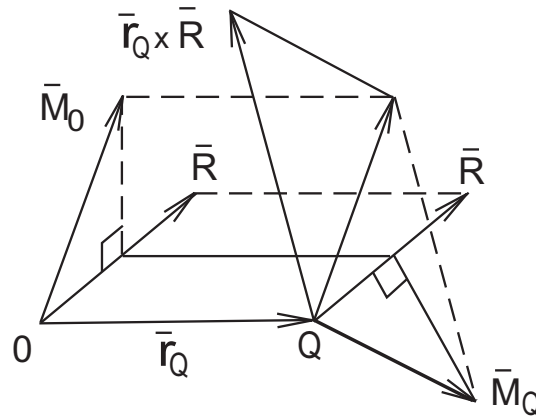


Figura II.2. Variația tursorului SVA la schimbarea polului

În continuare se prezintă caracteristicile sistemelor simple de vectori alunecători raportate la un reper triortogonal  $OXYZ$ .

1. Sistem format dintr-un singur vector  $\bar{F}$  cu dreapta suport  $(\Delta)$ :

$$S = \{\bar{F}\} \quad (2.22)$$

$$\bar{R} = \bar{F} \neq \bar{0} \quad (2.23)$$

$$\bar{\mathcal{M}}_O = \bar{\mathcal{M}}_O(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F}, \quad \bar{r} = \overline{OB}, \quad B \in (\Delta)$$

$$\bar{\mathcal{M}}_O = \begin{cases} \bar{0} & , \text{dacă } O \in (\Delta) \\ \bar{r} \times \bar{F} \neq \bar{0} & , \text{dacă } O \notin (\Delta) \end{cases} \quad (2.24)$$

$$I_2 = \bar{R} \cdot \bar{\mathcal{M}}_O = \bar{F} \cdot (\bar{r} \times \bar{F}) = 0. \quad (2.25)$$

2. Sistem cuplu de vectori  $\bar{F}_1$  și  $\bar{F}_2$  cu dreptele suport  $(\Delta_1)$  și  $(\Delta_2)$  paralele:

$$S = \{\bar{F}_1, \bar{F}_2\}, \quad (\Delta_1) \parallel (\Delta_2), \quad \bar{F}_1 = -\bar{F}_2 \quad (2.26)$$

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 = \bar{0} \quad (2.27)$$

$$\bar{\mathcal{M}}_O = \bar{\mathcal{M}}_O(\bar{F}_1) + \bar{\mathcal{M}}_O(\bar{F}_2) = \bar{r}_1 \times \bar{F}_1 + \bar{r}_2 \times \bar{F}_2, \quad (2.28)$$

unde  $\bar{r}_1 = \overline{OB_1}$ ,  $B_1 \in (\Delta_1)$  și  $\bar{r}_2 = \overline{OB_2}$ ,  $B_2 \in (\Delta_2)$ .

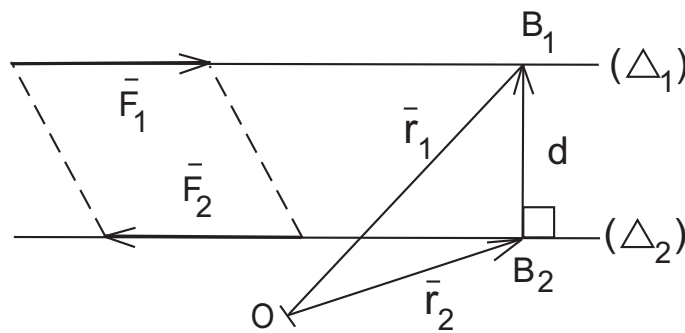


Figura II.3. Sistem cuplu de vectori

Din (2.27) rezultă  $\bar{F}_2 = -\bar{F}_1$  și înlocuind în relația (2.28) avem:

$$\bar{\mathcal{M}}_O = \overline{OB_1} \times \bar{F}_1 - \overline{OB_2} \times \bar{F}_1 \quad (2.29)$$

$$\bar{\mathcal{M}}_O = (\overline{OB_1} - \overline{OB_2}) \times \bar{F}_1 = \overline{B_2B_1} \times \bar{F}_1 \neq \bar{0}. \quad (2.30)$$

Dacă punctele  $B_1$  și  $B_2$  de pe dreptele suport  $(\Delta_1)$  și  $(\Delta_2)$  sunt alese astfel încât să avem  $B_1B_2 \perp (\Delta_1)$ ,  $B_1B_2 \perp (\Delta_2)$  se obține din (2.30):

$$|\bar{\mathcal{M}}_O| = |\overline{B_2B_1}| \cdot |\bar{F}_1| = d \cdot |\bar{F}_1| = d \cdot |\bar{F}_2|, \quad (2.31)$$

unde s-a notat  $d$  distanța dintre dreptele suport  $(\Delta_1)$  și  $(\Delta_2)$  ale vectorilor (Fig. II.3), distanță care se numește *brațul cuplului*.

$$I_2 = \bar{R} \cdot \bar{\mathcal{M}}_O = 0. \quad (2.32)$$

**Observația 2.3** Momentul unui cuplu de vectori este un vector liber, același indiferent de polul în raport cu care este calculat. Direcția este perpendiculară pe planul vectorilor.

3. Sistem de vectori torsor propriu zis  $\bar{F}_1$  și  $\bar{F}_2$  cu dreptele suport  $(\Delta_1)$  și  $(\Delta_2)$  neconcurente și neaparalele în spațiu (oarecare în spațiu):

$$S = \{\bar{F}_1, \bar{F}_2\}, (\Delta_1) \cap (\Delta_2) = \{\emptyset\}, \bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2 \neq \pm 1, \quad (2.33)$$

unde s-a notat  $\bar{u}_1$  și  $\bar{u}_2$  versorii dreptelor  $(\Delta_1)$  și  $(\Delta_2)$ .

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 \neq \bar{0} \quad (2.34)$$

$$\bar{\mathcal{M}}_O = \bar{\mathcal{M}}_O(\bar{F}_1) + \bar{\mathcal{M}}_O(\bar{F}_2) = \bar{r}_1 \times \bar{F}_1 + \bar{r}_2 \times \bar{F}_2 \neq \bar{0}, \quad (2.35)$$

unde  $\bar{r}_1 = \overline{OB_1}$ ,  $B_1 \in (\Delta_1)$  și  $\bar{r}_2 = \overline{OB_2}$ ,  $B_2 \in (\Delta_2)$ .

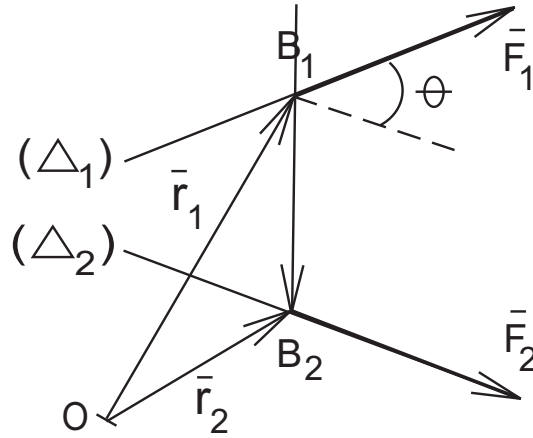


Figura II.4. Sistem torsor propriu zis

Din (2.34) și (2.35) se obține pentru scalarul torsorului

$$I_2 = \overline{R} \cdot \overline{\mathcal{M}}_O = (\overline{F}_1 + \overline{F}_2) \cdot (\overline{r}_1 \times \overline{F}_1 + \overline{r}_2 \times \overline{F}_2) \quad (2.36)$$

$$I_2 = \overline{F}_1 \cdot (\overline{r}_1 \times \overline{F}_1) + \overline{F}_1 \cdot (\overline{r}_2 \times \overline{F}_2) + \overline{F}_2 \cdot (\overline{r}_1 \times \overline{F}_1) + \overline{F}_2 \cdot (\overline{r}_2 \times \overline{F}_2) \quad (2.37)$$

$$I_2 = \overline{F}_1 \cdot (\overline{r}_2 \times \overline{F}_2) + \overline{F}_2 \cdot (\overline{r}_1 \times \overline{F}_1), \quad (2.38)$$

deoarece primul și ultimul produs mixt din (2.37) sunt egali cu zero, având câte doi factori identici.

În continuare, conform proprietăților produsului mixt, avem

$$I_2 = \overline{F}_1 \cdot (\overline{r}_2 \times \overline{F}_2) - \overline{F}_1 \cdot (\overline{r}_1 \times \overline{F}_2) \quad (2.39)$$

$$I_2 = \overline{F}_1 \cdot [(\overline{r}_2 - \overline{r}_1) \times \overline{F}_2] = \overline{F}_1 \cdot (\overline{B_1 B_2} \times \overline{F}_2) \neq 0, \quad (2.40)$$

deoarece cei trei vectori sunt necoplanari și neparaleli doi câte doi.

**Observația 2.4** Rezultanta unui torsor propriu zis este un vector liber, neavând o dreaptă suport precizată.

În concluzie, pe baza relațiilor (2.23), (2.24), (2.25), (2.27), (2.30), (2.32), (2.34), (2.35) și (2.40) se pot enunța următoarele rezultate asupra caracteristicilor sistemelor simple de vectori alunecători raportate la un reper  $OXYZ$ :

- pentru un sistem compus dintr-un singur vector cu dreapta suport  $(\Delta)$ ,  $\overline{R} \neq \overline{0}$ ,  $\overline{\mathcal{M}}_O = \overline{0}$  dacă  $O \in (\Delta)$  și  $\overline{\mathcal{M}}_O \neq \overline{0}$  dacă  $O \notin (\Delta)$ ,  $I_2 = 0$ ;
- pentru un sistem cuplu de vectori,  $\overline{R} = \overline{0}$ ,  $\overline{\mathcal{M}}_O \neq \overline{0}$ ,  $I_2 = 0$ ;
- pentru un sistem torsor propriu zis,  $\overline{R} \neq \overline{0}$ ,  $\overline{\mathcal{M}}_O \neq \overline{0}$ ,  $I_2 \neq 0$ .



## II.6. Echivalența sistemelor de vectori alunecători. Teoremele de echivalență

**Definiția 2.4** Două sisteme de vectori alunecători,  $S_1$  și  $S_2$ , care acționează succesiv asupra unui corp solid rigid, sunt echivalente între ele:

$$S_1 \sim S_2, \quad (2.41)$$

dacă unul poate fi obținut din celălalt printr-o succesiune de operații elementare de echivalență.

Denumirea de elementare arată că aceste operații nu pot fi descompuse în altele mai simple. Denumirea de echivalență subliniază că dacă se efectuează aceste operații într-unul din cele două sisteme,  $S_1$  sau  $S_2$ , acțiunea acestuia asupra corpului solid rigid are același rezultat din punct de vedere al mișcării mecanice ca acțiunea celuilalt sistem de vectori,  $S_2$  sau  $S_1$ .

Există cinci operații elementare de echivalență care se aplică pentru un sistem de vectori alunecători (SVA):

1. alunecarea unui vector pe dreapta suport, pentru a schimba punctul de aplicație;
2. înlocuirea a doi vectori cu drepte suport concurente prin rezultanta acestora, dată de regula paralelogramului în punctul de concurență a suporturilor;
3. descompunerea unui vector pe două direcții concurente într-un punct de pe dreapta suport, prin regula paralelogramului;
4. introducerea în sistem a doi vectori direct opuși (pe aceeași dreaptă suport, egali în modul și de sensuri contrare);
5. anularea din sistem a doi vectori direct opuși.

**Observația 2.5** Introducerea în SVA a doi vectori direct opuși se poate face pe orice dreaptă suport.

**Observația 2.6** A doua și a treia operație, respectiv a patru și a cincea, sunt operații inverse, astfel încât se poate afirma că la bază operațiile elementare de echivalență sunt în număr de trei.

Pe baza definiției echivalenței sistemelor de vectori alunecători se demonstrează trei teoreme generale de echivalență, denumite teorema a I-a, teorema a II-a, respectiv teorema a III-a de echivalență.

Înainte de a prezenta teoremele generale de echivalență se demonstrează o teoremă în legătură cu echivalența sistemelor de vectori paraleli, sisteme dintre care a fost inclus în categoria sistemelor simple de vectori alunecători (prezentate în II.5) numai sistemul care formează un cuplu de vectori.

**Teorema 2.1** (teorema de reducere a vectorilor paraleli) *Un sistem compus din doi vectori alunecători paraleli, care **nu** formează un cuplu de vectori este echivalent cu un vector unic.*

**Demonstrație.** Se consideră un sistem compus din doi vectori alunecători  $\vec{F}_1$  și  $\vec{F}_2$ , cu dreptele suport  $(\Delta_1)$ , respectiv  $(\Delta_2)$ , paralele:

$$S = \{\vec{F}_1, \vec{F}_2\}, (\Delta_1) \parallel (\Delta_2), \quad (2.42)$$

care nu formează un cuplu de vectori.

Sunt posibile două situații:

- vectorii  $\vec{F}_1$  și  $\vec{F}_2$  au același sens și mărimi diferite sau egale (Fig. II.5 a);
- vectorii  $\vec{F}_1$  și  $\vec{F}_2$  au sensuri contrare și mărimi diferite (Fig. II.5 b).

Prin mărime se înțelege modulul vectorului.

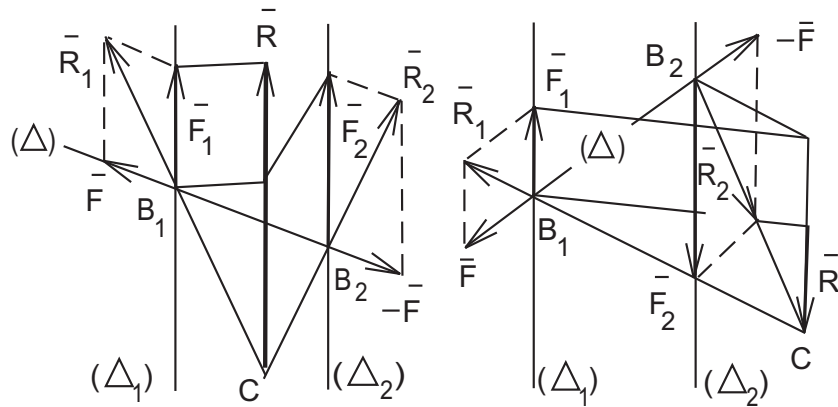


Figura II.5. Reducerea sistemelor de vectori paraleli

Se intersectează dreptele suport  $(\Delta_1)$  și  $(\Delta_2)$  ale vectorilor  $\vec{F}_1$ , respectiv  $\vec{F}_2$ , cu o dreaptă secantă arbitrară  $(\Delta)$  și se notează  $B_1$ , respectiv  $B_2$ , punctele de intersecție:

$$B_1 = (\Delta_1) \cap (\Delta), \quad B_2 = (\Delta_2) \cap (\Delta).$$

Pe dreapta  $(\Delta)$  se introduce o pereche de vectori direct opuși,  $\vec{F}$  în punctul  $B_1$  și  $(-\vec{F})$  în punctul  $B_2$ , aceasta fiind una dintre operațiile elementare de echivalență.

Se notează  $\vec{R}_1$  rezultanta vectorilor  $\vec{F}_1$  și  $\vec{F}$ , concurenți în punctul  $B_1$  și  $\vec{R}_2$  rezultanta vectorilor  $\vec{F}_2$  și  $(-\vec{F})$ , concurenți în punctul  $B_2$ :

$$\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}, \quad \vec{R}_2 = \vec{F}_2 - \vec{F},$$

relații scrise conform regulii paralelogramului.

După efectuarea acestor operații, sistemul de vectori  $S$ , compus din vectorii  $\vec{F}_1$  și  $\vec{F}_2$ , a devenit echivalent cu sistemul  $S'$ :

$$S' = \{\vec{R}_1, \vec{R}_2\},$$

compus din doi vectori coplanari și neparaleli, ale căror drepte suport se intersectează într-un punct din planul dreptelor  $(\Delta_1)$  și  $(\Delta_2)$ , notat  $C$ .

Conform regulii paralelogramului, vectorii  $\overline{R}_1$  și  $\overline{R}_2$  ai sistemului  $S'$  se adună în punctul  $C$  de intersecție a suporturilor, având o rezultantă unică:

$$\overline{R} = \overline{R}_1 + \overline{R}_2,$$

care este și rezultanta sistemului echivalent  $S$ :

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2, \quad (2.43)$$

cu aceasta teorema fiind demonstrată. ■

**Observația 2.7** Punctul  $C$ , care aparține dreptei suport a rezultantei, se află între dreptele suport  $(\Delta_1)$  și  $(\Delta_2)$  ale vectorilor  $\overline{F}_1$  și  $\overline{F}_2$  dacă vectorii au același sens, respectiv în afara dreptelor suport dacă vectorii au sensuri contrare.

**Observația 2.8** Modulul rezultantei este

$$|\overline{R}| = |\overline{F}_1| + |\overline{F}_2|$$

dacă vectorii au același sens, respectiv

$$|\overline{R}| = \left| |\overline{F}_1| - |\overline{F}_2| \right|,$$

dacă vectorii au sensuri contrare.

**Observația 2.9** Sensul rezultantei  $\overline{R}$  este același cu sensul vectorilor  $\overline{F}_1$  și  $\overline{F}_2$ , dacă aceștia au același sens, sau este același cu al vectorului mai mare în modul, dacă vectorii au sensuri contrare.

**Teorema 2.2** (teorema a I-a de echivalență) *Dacă două sisteme de vectori alunecători  $S_1$  și  $S_2$  au același torsesor în raport cu un punct oarecare  $P$ , adică rezultantele și momentele rezultante sunt egale:*

$$\overline{R}_1 = \overline{R}_2 \quad \text{și} \quad \overline{\mathcal{M}}_{1P} = \overline{\mathcal{M}}_{2P}, \quad (2.44)$$

*atunci acestea sunt echivalente,  $S_1 \sim S_2$ .*

**Demonstrație.** Vectorii  $\overline{R}_1$  și  $\overline{R}_2$  reprezintă rezultantele sistemelor  $S_1$ , respectiv  $S_2$ , iar  $\overline{\mathcal{M}}_{1P}$  și  $\overline{\mathcal{M}}_{2P}$  sunt momentele rezultante ale sistemelor în raport cu punctul  $P$ . Pentru a demonstra teorema trebuie să se verifice că sistemele au același torsesor în raport cu orice punct.

Se consideră un punct oarecare  $Q$ ,  $Q \neq P$ . Egalitatea rezultatelor

$$\overline{R}_1 = \overline{R}_2 \quad (2.45)$$

este valabilă indiferent de polul de reducere, deoarece rezultantele sunt sume vectoriale, iar adunarea vectorilor nu depinde de sistemul de referință.

Pentru momentele rezultante ale sistemelor  $S_1$  și  $S_2$  în raport cu polul  $Q$ ,  $\overline{\mathcal{M}}_{1Q}$ , respectiv  $\overline{\mathcal{M}}_{2Q}$ , se scrie legea de variație a momentului la schimbarea polului ((1.85)):

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{M}}_{1Q} &= \overline{\mathcal{M}}_{1P} + \overline{QP} \times \overline{R}_1 \\ \overline{\mathcal{M}}_{2Q} &= \overline{\mathcal{M}}_{2P} + \overline{QP} \times \overline{R}_2\end{aligned}\tag{2.46}$$

Din (2.44) și (2.46) rezultă

$$\overline{\mathcal{M}}_{1Q} = \overline{\mathcal{M}}_{2Q},\tag{2.47}$$

deci momentele rezultante ale sistemelor  $S_1$  și  $S_2$  în raport cu polul  $Q$  sunt, de asemenea, egale.

Conform (2.45) și (2.47), sistemele de vectori alunecători  $S_1$  și  $S_2$  au același torsesor și în raport cu polul  $Q$ , cu aceasta teorema fiind demonstrată. ■

**Teorema 2.3** (teorema a II-a de echivalență) *Orice sistem de vectori alunecători poate fi redus, prin operațiile elementare de echivalență, la unul dintre sistemele simple de vectori alunecători (torsesor propriu zis, vector unic sau cuplu de vectori) sau, în caz particular, poate fi în echilibru (echivalent cu zero).*

**Demonstrație.** Se consideră un sistem de vectori alunecători

$$S = \{\overline{F}_1, \overline{F}_2, \dots, \overline{F}_n\},\tag{2.48}$$

unde  $n$  este numărul vectorilor sistemului, cu drepte suport  $(\Delta_1), (\Delta_2), \dots, (\Delta_n)$  conținute într-un domeniu  $D$  al spațiului tridimensional ( $D \subset \mathbb{R}^3$ ), domeniu ce corespunde volumului unui corp solid rigid asupra căruia acționează sistemul de vectori.

Teorema se demonstrează în cazul cel mai general în care drepte suport ale vectorilor sunt necoplanare două câte două.

Se raportează sistemul de vectori  $S$  la un reper triortogonal  $OXYZ$ . Rezultanta sistemului este

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \dots + \overline{F}_n = \sum_{\mu=1}^n \overline{F}_\mu,\tag{2.49}$$

iar momentul resultant în raport cu polul  $O$  este:

$$\overline{\mathcal{M}}_O = \overline{\mathcal{M}}_O(\overline{F}_1) + \overline{\mathcal{M}}_O(\overline{F}_2) + \dots + \overline{\mathcal{M}}_O(\overline{F}_n) = \sum_{\mu=1}^n \overline{\mathcal{M}}_O(\overline{F}_\mu).\tag{2.50}$$

Se consideră un plan  $(p_n)$  care conține dreapta suport  $(\Delta_n)$  a vectorului  $\overline{F}_n$ , plan ales arbitrar neparalel cu drepte suport  $(\Delta_1)$  și  $(\Delta_2)$  ale vectorilor  $\overline{F}_1$ , respectiv  $\overline{F}_2$ . Se notează  $B_1$  punctul de intersecție al planului  $(p_n)$  cu dreapta suport  $(\Delta_1)$  a vectorului  $\overline{F}_1$  și  $B_2$  punctul de intersecție al planului  $(p_n)$  cu dreapta suport  $(\Delta_2)$  a vectorului  $\overline{F}_2$ :

$$(\Delta_n) \subset (p_n), B_1 = (p_n) \cap (\Delta_1), B_2 = (p_n) \cap (\Delta_2).\tag{2.51}$$

Se consideră un punct arbitrar  $B_n$  pe dreapta suport  $(\Delta_n)$  a vectorului  $\overline{F}_n$  și se unește punctul  $B_n$  cu punctele  $B_1$  și  $B_2$ , obținând dreptele  $B_n B_1$  și  $B_n B_2$  conținute în planul  $(p_n)$ :

$$B_n \in (\Delta_n), B_n B_1 \subset (p_n), B_n B_2 \subset (p_n).\tag{2.52}$$

Conform operațiilor elementare de echivalență, vectorul  $\bar{F}_n$  se descompune prin regula paralelogramului în punctul  $B_n$  în două componente pe direcțiile  $B_n B_1$  și  $B_n B_2$ :

$$\bar{F}_n = \bar{F}_{1n} + \bar{F}_{2n}, \quad (2.53)$$

unde  $\bar{F}_{1n}$  este un vector pe direcția  $B_n B_1$  iar  $\bar{F}_{2n}$  este un vector pe direcția  $B_n B_2$ .

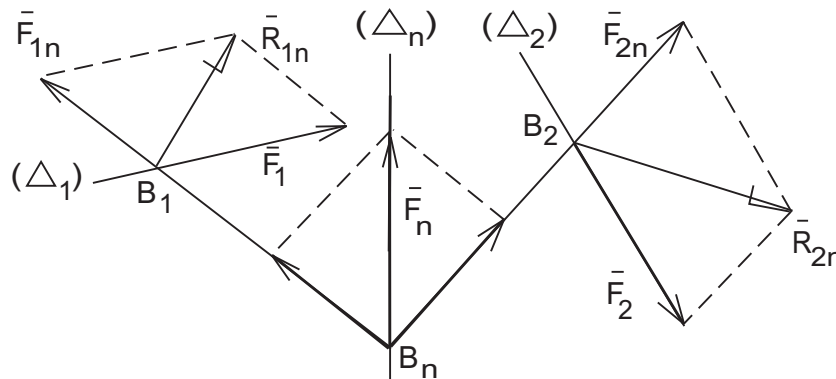


Figura II.6. Reducerea SVA prin operații elementare de echivalență – vedere în planul  $(p_n)$  –

Se notează  $\bar{R}_{1n}$  rezultanta vectorilor  $\bar{F}_1$  și  $\bar{F}_{1n}$ , concurenți în punctul  $B_1$ :

$$\bar{R}_{1n} = \bar{F}_1 + \bar{F}_{1n} \quad (2.54)$$

și  $\bar{R}_{2n}$  rezultanta vectorilor  $\bar{F}_2$  și  $\bar{F}_{2n}$ , concurenți în punctul  $B_2$ :

$$\bar{R}_{2n} = \bar{F}_2 + \bar{F}_{2n}, \quad (2.55)$$

relații scrise conform regulii paralelogramului.

După aplicarea acestor operații de echivalență, care constituie primul pas al demonstrației, sistemul de vectori  $S$  devine echivalent cu sistemul  $S_1$ :

$$S_1 = \{\bar{R}_{1n}, \bar{R}_{2n}, \bar{F}_3, \dots, \bar{F}_{n-1}\}, \quad (2.56)$$

care are  $(n - 1)$  vectori.

În continuare, se trece la pasul următor al demonstrației, considerând vectorii  $\bar{R}_{1n}$ ,  $\bar{R}_{2n}$  și  $\bar{F}_{n-1}$ , pentru care se aplică același algoritm al operațiilor de echivalență (relațiile (2.51)–(2.55)). Se obține astfel un sistem echivalent cu sistemul  $S_1$ , notat  $S_2$ :

$$S_2 = \{\bar{R}_{1_{n-1}}, \bar{R}_{2_{n-1}}, \bar{F}_3, \dots, \bar{F}_{n-2}\}, \quad (2.57)$$

care are  $(n - 2)$  vectori, unde  $\bar{R}_{1_{n-1}}$  și  $\bar{R}_{2_{n-1}}$  sunt rezultantele vectorilor  $\bar{R}_{1n}$ ,  $\bar{R}_{2n}$  și  $\bar{F}_{n-1}$  ai sistemului  $S_1$ .

Se procedează analog în continuare, fiecare aplicare a algoritmului operațiilor de echivalență fiind un pas al demonstrației.

În funcție de caracteristicile sistemului de vectori alunecători  $S$  sunt posibile patru cazuri de echivalență, prezentate după cum urmează.

1. Dacă  $\overline{R} \neq \overline{0}$ ,  $\overline{M}_O \neq \overline{0}$  și  $I_2 = \overline{R} \cdot \overline{M}_O \neq 0$ , după un număr de  $(n - 2)$  pași de aplicare a algoritmului operațiilor de echivalență sistemul  $S$  devine echivalent cu un sistem compus din doi vectori cu dreptele suport neconcurente și neparalele (oarecare în spațiu), adică sistemul  $S$  este echivalent cu un torsor propriu zis.
2. Dacă  $\overline{R} \neq \overline{0}$ ,  $\overline{M}_O = \overline{0}$  sau  $\overline{M}_O \neq \overline{0}$  și  $I_2 = \overline{R} \cdot \overline{M}_O = 0$ , după un număr de  $(n - 1)$  pași sistemul  $S$  devine echivalent cu un vector unic a cărui dreaptă suport conține punctul  $O$  (originea) dacă  $\overline{M}_O = \overline{0}$  sau nu conține punctul  $O$  dacă  $\overline{M}_O \neq \overline{0}$ .
3. Dacă  $\overline{R} = \overline{0}$  și  $\overline{M}_O \neq \overline{0}$ , după un număr de  $(n - 2)$  pași sistemul  $S$  devine echivalent cu un sistem compus din doi vectori paraleli, egali în modul și de sensuri contrare, adică sistemul  $S$  este echivalent cu un cuplu de vectori.
4. Dacă  $\overline{R} = \overline{0}$  și  $\overline{M}_O = \overline{0}$ , după un număr de  $(n - 1)$  pași de aplicare a algoritmului operațiilor de echivalență vectorii sistemului  $S$  se anulează, adică sistemul este echivalent cu zero.

Cu acestea, teorema a II-a de echivalență este demonstrată în ipoteza cea mai generală în care dreptele suport ale vectorilor sistemului  $S$  sunt necoplanare două câte două.

Pentru a verifica aplicarea teoremei la orice sistem de vectori alunecători se consideră cazul particular în care doi vectori ai sistemului  $S$  au suporturi coplanare și se demonstrează că acest caz este echivalent cu cazul general în care s-a demonstrat teorema.

Se presupune că doi vectori ai sistemului de vectori alunecători  $S$ , definit în (2.48):

$$\overline{F}_\mu \text{ și } \overline{F}_\sigma, \quad \mu, \sigma \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad \mu \neq \sigma,$$

au dreptele suport  $(\Delta_\mu)$ , respectiv  $(\Delta_\sigma)$  coplanare.

Sunt posibile trei situații, prezentate după cum urmează:

1. Dreptele suport  $(\Delta_\mu)$  și  $(\Delta_\sigma)$  ale vectorilor  $\overline{F}_\mu$ , respectiv  $\overline{F}_\sigma$ , sunt concurente într-un punct  $B$ :

$$B = (\Delta_\mu) \cap (\Delta_\sigma).$$

În acest caz, vectorii  $\overline{F}_\mu$  și  $\overline{F}_\sigma$  se adună după regula paralelogramului în punctul  $B$  în care se intersectează dreptele suport, având o rezultantă unică:

$$\overline{R}_{\mu\sigma} = \overline{F}_\mu + \overline{F}_\sigma.$$

Sistemul de vectori  $S$ , care are  $n$  vectori, este echivalent cu un sistem  $S'$ , care are  $(n - 1)$  vectori, în care vectorii  $\overline{F}_\mu$  și  $\overline{F}_\sigma$  au fost înlocuiți cu rezultanta acestora,  $\overline{R}_{\mu\sigma}$ . Teorema a II-a de echivalență se aplică sistemului echivalent  $S'$  în cazul general.

2. Dreptele suport  $(\Delta_\mu)$  și  $(\Delta_\sigma)$  sunt paralele:

$$(\Delta_\mu) \parallel (\Delta_\sigma)$$

și vectorii  $\overline{F}_\mu$ , respectiv  $\overline{F}_\sigma$ , nu formează un cuplu de vectori, având același sens sau mărimi diferite și sensuri contrare.

În acest caz, vectorii  $\overline{F}_\mu$  și  $\overline{F}_\sigma$  se adună conform teoremei de echivalență a vectorilor paraleli (Teorema 2.1), având o rezultantă unică conform relației (2.43):

$$\overline{R}_{\mu\sigma} = \overline{F}_\mu + \overline{F}_\sigma,$$

conținută în planul vectorilor.

Sistemul de vectori  $S$ , care are  $n$  vectori, este echivalent cu un sistem  $S'$ , care are  $(n - 1)$  vectori, în care vectorii  $\overline{F}_\mu$  și  $\overline{F}_\sigma$  au fost înlocuiți cu rezultanta acestora,  $\overline{R}_{\mu\sigma}$ . Teorema a II-a de echivalență se aplică sistemului echivalent  $S'$  în cazul general.

3. Dreptele suport  $(\Delta_\mu)$  și  $(\Delta_\sigma)$  sunt paralele și vectorii  $\overline{F}_\mu$ , respectiv  $\overline{F}_\sigma$ , formează un cuplu de vectori:

$$(\Delta_\mu) \parallel (\Delta_\sigma), \quad \overline{F}_\mu = -\overline{F}_\sigma.$$

În acest caz, vectorii  $\overline{F}_\mu$  și  $\overline{F}_\sigma$  au rezultanta nulă

$$\overline{R}_{\mu\sigma} = \overline{F}_\mu + \overline{F}_\sigma = \overline{0}$$

și momentul rezultant

$$\overline{M}_{\mu\sigma} = \overline{M}_O(\overline{F}_\mu) + M_O(\overline{F}_\sigma),$$

vector liber perpendicular pe planul vectorilor, conform Observației 2.3.

Sistemul de vectori  $S$ , care are  $n$  vectori, este echivalent cu un sistem  $S'$ , care are  $(n - 2)$  vectori și cu un cuplu de vectori. Vectorii sistemului  $S'$  sunt vectorii sistemului  $S$ , mai puțin  $\overline{F}_\mu$  și  $\overline{F}_\sigma$ :

$$S' = S \setminus \{\overline{F}_\mu, \overline{F}_\sigma\}.$$

Teorema a II-a de echivalență se aplică sistemului echivalent  $S'$  în cazul general, cuplul de vectori  $\overline{F}_\mu$  și  $\overline{F}_\sigma$  fiind unul din sistemele simple de vectori alunecători.

În funcție de cazurile de echivalență ale sistemului  $S'$ , situațiile de echivalență ale sistemului  $S$  sunt prezentate în tabelul următor.

Tabelul de echivalență pentru un SVA la care se adaugă un cuplu de vectori

	Sistemul $S'$	Sistemul $S = S' + C.V.$
1	torsor propriu zis	torsor propriu zis vector unic
2	vector unic	torsor propriu zis vector unic
3	cuplu de vectori	cuplu de vectori sistem în echilibru
4	sistem în echilibru	cuplu de vectori

C.V. = cuplu de vectori

În continuare, se prezintă soluțiile a două ecuații vectoriale folosite în demonstrația Teoremei a III-a de echivalență.

Se consideră doi vectori  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  care verifică condiția  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .

Ecuția vectorială

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = 0 \quad (2.58)$$

are soluția generală

$$\vec{v} = \vec{p} - \left( \frac{\vec{a} \cdot \vec{p}}{|\vec{a}|^2} \right) \cdot \vec{a}, \quad (2.59)$$

unde  $\vec{p}$  este un vector arbitrar.

Vectorul  $\vec{v}$  poate fi liber, alunecător sau legat, indiferent de categoria vectorului  $\vec{a}$ .

Ecuția vectorială

$$\vec{v} \times \vec{a} = \vec{b} \quad (2.60)$$

are soluția generală

$$\vec{v} = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a}|^2} + \lambda \cdot \vec{a}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (2.61)$$

unde  $\lambda$  este un parametru real.

Dacă  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  sunt vectori liberi, vectorul  $\vec{v}$  este, de asemenea, vector liber.

Dacă  $\vec{a}$  este vector alunecător și  $\vec{b}$  vector legat, ca în relația care dă suportul unui vector în funcție de momentul polar ((1.103)), vectorul  $\vec{v}$  este legat de același punct ca vectorul  $\vec{b}$ .

**Teorema 2.4** (teorema a III-a de echivalență) *Orice sistem de vectori alunecători care se reduce la un torsor propriu zis este echivalent cu un sistem compus din doi vectori, dintre care unul ales arbitrar.*

**Demonstrație.** Se consideră un sistem de vectori alunecători  $S$ , raportat la un reper triortogonal  $OXYZ$ , care este echivalent cu un torsor propriu zis. Rezultanta, momentul resultant în raport cu polul  $O$  și scalarul torsorului sunt diferite de zero:

$$\bar{R} \neq \bar{0}, \quad \bar{\mathcal{M}}_O \neq \bar{0}, \quad I_2 = \bar{R} \cdot \bar{\mathcal{M}}_O \neq 0. \quad (2.62)$$

Se notează  $S'$  un alt sistem compus din doi vectori alunecători:

$$S' = \{\bar{F}_1, \bar{F}_2\}. \quad (2.63)$$

Pentru ca sistemul  $S$  să fie echivalent cu sistemul  $S'$  cele două sisteme trebuie să se reducă la același torsor în polul  $O$ , conform teoremei a I-a de echivalență. Această condiție implică:

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 \quad \text{și} \quad \bar{\mathcal{M}}_O = \bar{M}_O(\bar{F}_1) + \bar{M}_O(\bar{F}_2), \quad (2.64)$$

conform notațiilor din (2.62) și (2.63).

Se consideră  $\bar{F}_1$ , primul vector al sistemului  $S'$ , ales arbitrar. Conform definiției, momentul vectorului  $\bar{F}_1$  în raport cu polul  $O$  este

$$\bar{M}_O(\bar{F}_1) = \bar{r}_1 \times \bar{F}_1, \quad (2.65)$$

unde vectorul de poziție  $\bar{r}_1$  este nedeterminat.



În această ipoteză se determină vectorul  $\bar{r}_1$  care dă suportul forței  $\bar{F}_1$  și forța  $\bar{F}_2$ , al doilea vector al sistemului  $S'$ .

Din (2.64) rezultă al doilea vector al sistemului  $S'$  și momentul acestuia în raport cu polul  $O$ :

$$\bar{F}_2 = \bar{R} - \bar{F}_1, \quad \bar{M}_O(\bar{F}_2) = \bar{M}_O - \bar{M}_O(\bar{F}_1),$$

sau încă, conform (2.65):

$$\bar{F}_2 = \bar{R} - \bar{F}_1, \quad \bar{M}_O(\bar{F}_2) = \bar{M}_O - \bar{r}_1 \times \bar{F}_1. \quad (2.66)$$

Se pune condiția de perpendicularitate între forța  $\bar{F}_2$  și momentul acesteia:

$$\bar{F}_2 \cdot \bar{M}_O(\bar{F}_2) = 0. \quad (2.67)$$

Înlocuind (2.66) în (2.67), se obține

$$(\bar{M}_O - \bar{r}_1 \times \bar{F}_1) \cdot (\bar{R} - \bar{F}_1) = 0, \quad (2.68)$$

ecuație vectorială în care se consideră primul factor ca vector necunoscut.

Conform (2.59), soluția generală a ecuației vectoriale (2.68) este

$$\bar{M}_O - \bar{r}_1 \times \bar{F}_1 = \bar{M}_1 - \left( \frac{\bar{M}_1 \cdot (\bar{R} - \bar{F}_1)}{|\bar{R} - \bar{F}_1|^2} \right) \cdot (\bar{R} - \bar{F}_1), \quad (2.69)$$

unde  $\bar{M}_1$  este un vector arbitrar.

Din (2.69) rezultă

$$\bar{r}_1 \times \bar{F}_1 = \bar{M}_O - \bar{M}_1 + \left( \frac{\bar{M}_1 \cdot (\bar{R} - \bar{F}_1)}{|\bar{R} - \bar{F}_1|^2} \right) \cdot (\bar{R} - \bar{F}_1). \quad (2.70)$$

Se observă că ultimul termen din membrul drept al ecuației (2.70) reprezintă proiecția vectorului  $\bar{M}_1$  pe direcția vectorului  $(\bar{R} - \bar{F}_1)$ , conform definiției (1.32):

$$\left( \frac{\bar{M}_1 \cdot (\bar{R} - \bar{F}_1)}{|\bar{R} - \bar{F}_1|^2} \right) \cdot (\bar{R} - \bar{F}_1) = \left( \frac{\bar{M}_1 \cdot (\bar{R} - \bar{F}_1)}{|\bar{R} - \bar{F}_1|} \right) \cdot \frac{\bar{R} - \bar{F}_1}{|\bar{R} - \bar{F}_1|} = (\text{pr}_{(\Delta_2)} \bar{M}_1) \cdot \bar{u}_2, \quad (2.71)$$

unde s-a notat  $(\Delta_2)$  dreapta suport a vectorului  $\bar{F}_2$  și  $\bar{u}_2$  versorul acestui vector.

În condiția (2.71), ecuația (2.70) se scrie

$$\bar{r}_1 \times \bar{F}_1 = \bar{M}_O - [\bar{M}_1 - (\text{pr}_{(\Delta_2)} \bar{M}_1) \cdot \bar{u}_2],$$

sau încă

$$\bar{r}_1 \times \bar{F}_1 = \bar{M}_O - \bar{M}, \quad (2.72)$$

unde s-a notat  $\bar{M}$  un vector arbitrar perpendicular pe vectorul  $(\bar{R} - \bar{F}_1)$ .

Relația (2.72) este o ecuație vectorială în care se consideră primul factor  $\bar{r}_1$  ca vector necunoscut. Conform (2.61), soluția generală a ecuației (2.72) este

$$\bar{r}_1 = \frac{\bar{F}_1 \times (\bar{M}_O - \bar{M})}{|\bar{F}_1|^2} + \lambda_1 \cdot \bar{F}_1, \quad \lambda_1 \in \mathbb{R}, \quad (2.73)$$

unde  $\lambda_1$  este un parametru real.

Din (2.66) și (2.72) rezultă pentru al doilea vector al sistemului  $S'$ :

$$\overline{F}_2 = \overline{R} - \overline{F}_1, \quad \overline{M}_O(\overline{F}_2) = \overline{M}_O - (\overline{M}_O - \overline{M}) = \overline{M}. \quad (2.74)$$

Conform definiției, momentul vectorului  $\overline{F}_2$  în raport cu polul  $O$  este

$$\overline{M}_O(\overline{F}_2) = \overline{r}_2 \times \overline{F}_2, \quad (2.75)$$

unde vectorul de poziție  $\overline{r}_2$  este nedeterminat.

Conform (2.61), soluția generală a ecuației vectoriale (2.75) este

$$\overline{r}_2 = \frac{\overline{F}_2 \times \overline{M}_O(\overline{F}_2)}{|\overline{F}_2|^2} + \lambda_2 \cdot \overline{F}_2, \quad \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad (2.76)$$

unde  $\lambda_2$  este un parametru real, sau încă, înlocuind forța  $\overline{F}_2$  și momentul acesteia conform (2.74):

$$\overline{r}_2 = \frac{(\overline{R} - \overline{F}_1) \times \overline{M}}{|\overline{R} - \overline{F}_1|^2} + \lambda_2 \cdot (\overline{R} - \overline{F}_1), \quad \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad (2.77)$$

cu aceasta teorema fiind demonstrată. ■

**Observația 2.10** Soluțiile ecuațiilor vectoriale (2.72) și (2.75) sunt date și în Capitolul I. Soluția ecuației (1.76) din I.8 este dată de relația (1.103) din I.10.

În concluzie, vectorii sistemului  $S'$ , echivalent cu sistemul dat  $S$ , sunt:

$$\overline{F}_1 \text{ arbitrar}, \quad \overline{F}_2 = \overline{R} - \overline{F}_1, \quad (2.78)$$

unde  $\overline{R}$  este rezultanta sistemului  $S$ , iar dreptele suport ale acestor vectori sunt date de relațiile (2.73) și (2.77):

$$\begin{aligned} (\Delta_1) \quad &: \quad \overline{r}_1 = \frac{\overline{F}_1 \times (\overline{M}_O - \overline{M})}{|\overline{F}_1|^2} + \lambda_1 \cdot \overline{F}_1, \quad \lambda_1 \in \mathbb{R}, \\ (\Delta_2) \quad &: \quad \overline{r}_2 = \frac{(\overline{R} - \overline{F}_1) \times \overline{M}}{|\overline{R} - \overline{F}_1|^2} + \lambda_2 \cdot (\overline{R} - \overline{F}_1), \quad \lambda_2 \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (2.79)$$

unde  $\lambda_1$  și  $\lambda_2$  sunt parametri reali,  $\overline{M}_O$  este momentul resultant în polul  $O$  al sistemului  $S$ , iar  $\overline{M}$  este un vector arbitrar perpendicular pe vectorul  $(\overline{R} - \overline{F}_1)$ .

## II.7. Teorema lui Varignon

Teorema lui Varignon este o teoremă importantă în teoria sistemelor de vectori alunecători, demonstrată prima dată de matematicianul francez Pierre Varignon (1654-1722) sub forma unei teoreme generalizate. Ulterior, teorema generalizată a lui Varignon a fost prezentată și în alte formulări.

**Teorema 2.5** (Teorema generalizată a lui Varignon) *Momentul rezultat, într-un pol oarecare, al unui sistem de vectori alunecători cu drepte suport concurente este egal cu momentul, calculat în același pol, al vectorului rezultat al sistemului.*

**Demonstrație.** Demonstrația se face pentru un sistem compus din două forțe concurente

$$S = \{\bar{F}_1, \bar{F}_2\},$$

cu drepte suport  $(\Delta_1)$  și  $(\Delta_2)$ , iar rezultatul poate fi extins la sisteme compuse din mai multe forțe concurente, coplanare sau necoplanare.

Sistemul  $S$  se raportează la un reper triortogonal  $OXYZ$ . Rezultanta și momentul rezultat în raport cu polul  $O$  sunt:

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2, \quad (2.80)$$

$$\bar{\mathcal{M}}_O = \bar{\mathcal{M}}_O(\bar{F}_1) + \bar{\mathcal{M}}_O(\bar{F}_2) = \bar{r}_1 \times \bar{F}_1 + \bar{r}_2 \times \bar{F}_2, \quad (2.81)$$

unde  $\bar{r}_1 = \bar{r}_2 = \bar{r} = \overline{OP}$ ,  $P = (\Delta_1) \cap (\Delta_2)$ .

Avem

$$\bar{\mathcal{M}}_O = \bar{r} \times \bar{F}_1 + \bar{r} \times \bar{F}_2 = \bar{r} \times (\bar{F}_1 + \bar{F}_2). \quad (2.82)$$

Rezultanta sistemului este dată grafic de regula paralelogramului în punctul  $P$  de intersecție a dreptelor suport ale vectorilor (Fig. II.7).

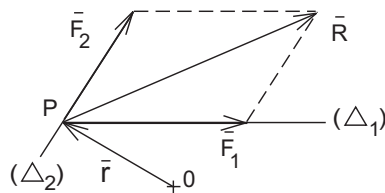


Figura II.7. Sistem de forțe concurente

Înlocuind (2.80) în (2.82) se obține

$$\bar{\mathcal{M}}_O = \bar{r} \times \bar{R} = \bar{\mathcal{M}}_O(\bar{R}), \quad (2.83)$$

cu aceasta teorema fiind demonstrată. ■

Teorema este o consecință a distributivității produsului vectorial în raport cu adunarea vectorilor. Rezultatul este valabil și pentru un sistem compus din mai multe forțe concurente, indiferent de polul de calcul al momentelor.

Sub această formă, teorema a fost prima dată demonstrată de către Pierre Varignon.

Ca o consecință a teoremei generalizate a lui Varignon se prezintă următoarea observație.

**Observația 2.11** Un sistem de vectori alunecători concurenți (care acționează în același punct) se află în echilibru dacă rezultanta este nulă.

**Teorema 2.6** (Teorema aplicată a lui Varignon) *Un sistem de vectori alunecători  $S$  raportat la un reper triortogonal  $OXYZ$  care satisface condițiile:*

- rezultanta diferită de zero,  $\overline{R} \neq \overline{0}$ ,
- invariantul scalar egal cu zero,

$$I_2 = \overline{R} \cdot \overline{\mathcal{M}}_O = 0,$$

*este echivalent cu un vector unic, iar momentul rezultant în raport cu polul  $O$  este egal cu momentul vectorului rezultant calculat în același pol:*

$$\overline{\mathcal{M}}_O = \overline{M}_O(\overline{R}).$$

**Demonstrație.** Conform Teoremei a II-a de echivalență se consideră că sistemul dat  $S$  este echivalent cu un sistem  $S'$  compus din doi vectori cu drepte suport disjuncte (oarecare în spațiu):

$$S \sim S', \quad S' = \{\overline{F}_1, \overline{F}_2\}. \quad (2.84)$$

Se notează  $(\Delta_1)$  și  $(\Delta_2)$  dreptele suport ale vectorilor  $\overline{F}_1$ , respectiv  $\overline{F}_2$ . Avem:

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2, \quad \overline{\mathcal{M}}_O = \overline{M}_O(\overline{F}_1) + \overline{M}_O(\overline{F}_2), \quad I_2 = \overline{R} \cdot \overline{\mathcal{M}}_O = 0,$$

conform condiției de echivalență.

Conform relației (2.40), demonstrată în paragraful II.5, se poate scrie

$$I_2 = \overline{F}_1 \cdot (\overline{B_1 B_2} \times \overline{F}_2) = 0, \quad (2.85)$$

unde  $B_1$  și  $B_2$  sunt puncte arbitrare pe dreptele suport  $(\Delta_1)$  și  $(\Delta_2)$ ,  $B_1 \in (\Delta_1)$ ,  $B_2 \in (\Delta_2)$ .

Conform proprietăților cunoscute ale produsului mixt a trei vectori, relația (2.85) este satisfăcută dacă și numai dacă dreptele suport  $(\Delta_1)$  și  $(\Delta_2)$  ale vectorilor  $\overline{F}_1$ , respectiv  $\overline{F}_2$ , sunt concurente sau paralele, vectorul  $\overline{B_1 B_2}$  fiind arbitrar.

Dacă dreptele suport  $(\Delta_1)$  și  $(\Delta_2)$  sunt concurente, vectorii  $\overline{F}_1$  și  $\overline{F}_2$  se adună în punctul de concurență conform regulii paralelogramului, având o rezultantă unică.

Dacă dreptele suport  $(\Delta_1)$  și  $(\Delta_2)$  sunt paralele, vectorii  $\overline{F}_1$  și  $\overline{F}_2$  se adună conform teoremei de echivalență a vectorilor paraleli (Teorema 2.1), având o rezultantă unică.

În ambele cazuri, sistemul  $S'$  este echivalent cu un vector unic și conform (2.84) rezultă că și sistemul dat  $S$  este echivalent cu un vector unic, situație în care pentru sistemul  $S$  se aplică teorema generalizată a lui Varignon în raport cu polul  $O$ :

$$\overline{\mathcal{M}}_O = \overline{M}_O(\overline{R}),$$

momentul rezultant este egal cu momentul vectorului rezultant.

Cu aceasta, teorema aplicată a lui Varignon este demonstrată. Teorema este valabilă indiferent de polul de calcul al momentelor. ■

Teorema aplicată a lui Varignon poate fi formulată restrâns astfel:

Pentru un sistem de vectori alunecători echivalent cu un vector unic, momentul vectorului rezultant este egal cu suma vectorială a momentelor vectorilor sistemului, calculată în raport cu același pol.

Ca o consecință a teoremei aplicate a lui Varignon se prezintă următoarea observație.

**Observația 2.12** Un sistem de vectori alunecători echivalent cu un vector unic poate fi transformat într-un sistem de vectori în echilibru prin adăugarea unui vector direct opus cu rezultanta.

## II.8. Cazurile de reducere ale sistemelor de vectori alunecători

Prin stabilirea cazului de reducere al unui sistem de vectori alunecători se înțelege precizarea sistemului simplu de vectori alunecători cu care acesta este echivalent sau dacă este în echilibru.

Se consideră un sistem de vectori alunecători  $S$  raportat la un reper triortogonal  $OXYZ$ . Cazul de reducere se apreciază în funcție de cele trei caracteristici de bază ale sistemului (Definiția 2.3 cu relația (2.17)):

- rezultanta  $\overline{R}$ ;
- momentul rezultat în raport cu polul  $O$ ,  $\overline{M}_O$ ;
- scalarul tursorului  $I_2 = \overline{R} \cdot \overline{M}_O$ .

Există patru cazuri de reducere ale sistemelor de vectori alunecători, adică trei sisteme simple de vectori alunecători cu care sunt echivalente toate sistemele (sistemele prezentate în paragraful II.5) și cazul de echilibru (SVA echivalent cu zero).

Cazurile de reducere ale sistemelor de vectori alunecători se numerează în ordinea egalității cu zero a caracteristicilor, primul caz are toate caracteristicile nule, ultimul caz are toate caracteristicile nenule.

1. SVA în echilibru (echivalent cu zero):  $\overline{R} = \overline{0}$ ,  $\overline{M}_O = \overline{0}$ , cazul unu de reducere.
2. SVA echivalent cu un cuplu de vectori:  $\overline{R} = \overline{0}$ ,  $\overline{M}_O \neq \overline{0}$ , cazul doi de reducere.
3. SVA echivalent cu un vector unic:  $\overline{R} = \overline{0}$ ,  $\overline{M}_O = \overline{0}$ , sau  $\overline{M}_O \neq \overline{0}$ ,  $I_2 = \overline{R} \cdot \overline{M}_O = 0$ , cazul trei de reducere.
4. SVA echivalent cu un tursor propriu zis:  $\overline{R} \neq \overline{0}$ ,  $\overline{M}_O \neq \overline{0}$ ,  $I_2 = \overline{R} \cdot \overline{M}_O \neq 0$ , cazul patru de reducere.

## II.9. Axa centrală a unui sistem de vectori alunecători. Tursorul minim

Se consideră un sistem de vectori alunecători  $S$  raportat la un reper triortogonal  $OXYZ$ , având dreptele suport ale vectorilor conținute într-un domeniu  $D$  al spațiului tridimensional ( $D \subset \mathbb{R}^3$ ), domeniu ce corespunde volumului unui corp solid rigid asupra căruia acționează sistemul de vectori.

Se notează  $\overline{R}$  vectorul rezultat și  $\overline{M}_O$  momentul rezultat în raport cu polul  $O$  (originea reperului  $OXYZ$ ) ale sistemului  $S$ .

Conform definiției din paragraful II.4, al treilea invariant scalar al sistemului de vectori este dat de proiecția momentului rezultat pe direcția rezultantei ((2.16)):

$$I_3 = \frac{\overline{R} \cdot \overline{\mathcal{M}}_O}{|\overline{R}|} = \text{pr}_{\overline{R}} \overline{\mathcal{M}}_O, \quad (2.86)$$

relație valabilă indiferent de polul în raport cu care se calculează momentul rezultat, în mod curent polul  $O$ , originea reperului  $OXYZ$ .

Momentul rezultat în raport cu polul  $O$  se descompune pe două direcții:

$$\overline{\mathcal{M}}_O = \overline{\mathcal{M}}_{On} + \overline{\mathcal{M}}_{Op}, \quad (2.87)$$

unde  $\overline{\mathcal{M}}_{On}$  și  $\overline{\mathcal{M}}_{Op}$  sunt componentele normală, respectiv paralelă cu rezultanta ale momentului rezultat:

$$\overline{\mathcal{M}}_{On} \perp \overline{R}, \quad \overline{\mathcal{M}}_{Op} \parallel \overline{R}. \quad (2.88)$$

Conform (2.86) și (2.88), valoarea algebrică a componentei paralelă cu rezultanta a momentului rezultat este egală cu al treilea invariant scalar al sistemului:

$$\mathcal{M}_{Op} = I_3 = \text{pr}_{\overline{R}} \overline{\mathcal{M}}_O. \quad (2.89)$$

Deoarece componenta paralelă cu rezultanta este invariantă, la schimbarea polului de calcul se modifică numai componenta normală pe rezultantă a momentului rezultat. Se caută un punct  $C$  în domeniul de distribuție ( $D$ ) al vectorilor sistemului în care componenta normală pe rezultantă a momentului rezultat calculat în raport cu acest punct să se anuleze:

$$\overline{\mathcal{M}}_C = \overline{\mathcal{M}}_{Cp}, \quad \overline{\mathcal{M}}_{Cp} \parallel \overline{R} \quad \text{și} \quad \overline{\mathcal{M}}_{Cn} = \overline{0}.$$

Pe baza condiției de paralelism între momentul rezultat în raport cu punctul  $C$  și rezultantă se scrie operația vectorială:

$$\overline{R} \times \overline{\mathcal{M}}_C = \overline{0}. \quad (2.90)$$

Conform legii de variație a momentului la schimbarea polului ((1.85)), avem:

$$\overline{\mathcal{M}}_O = \overline{\mathcal{M}}_C + \overline{r}_C \times \overline{R}, \quad \overline{\mathcal{M}}_C = \overline{\mathcal{M}}_O - \overline{r}_C \times \overline{R}, \quad (2.91)$$

unde  $\overline{r}_C$  este vectorul de poziție al punctului  $C$  în reperul considerat:

$$\overline{r}_C = \overline{OC}. \quad (2.92)$$

Din (2.90) și (2.91) rezultă

$$\begin{aligned} \overline{R} \times (\overline{\mathcal{M}}_O - \overline{r}_C \times \overline{R}) &= \overline{0}, \\ \overline{R} \times \overline{\mathcal{M}}_O - \overline{R} \times (\overline{r}_C \times \overline{R}) &= \overline{0}, \end{aligned}$$

sau încă, dezvoltând dublul produs vectorial conform (1.26):

$$\overline{R} \times \overline{\mathcal{M}}_O - \overline{R}^2 \cdot \overline{r}_C + (\overline{R} \cdot \overline{r}_C) \cdot \overline{R} = \overline{0},$$

de unde rezultă vectorul de poziție al punctului  $C$ :

$$\begin{aligned}\bar{r}_C &= \frac{\bar{R} \times \bar{\mathcal{M}}_O}{\bar{R}^2} + \left( \frac{\bar{R} \cdot \bar{r}_C}{|\bar{R}|^2} \right) \cdot \bar{R}, \\ \bar{r}_C &= \frac{\bar{R} \times \bar{\mathcal{M}}_O}{\bar{R}^2} + \left( \frac{\bar{R} \cdot \bar{r}_C}{|\bar{R}|} \right) \cdot \bar{u}_R, \quad \bar{u}_R = \frac{\bar{R}}{|\bar{R}|},\end{aligned}\tag{2.93}$$

unde s-a notat  $\bar{u}_R$  versorul rezultantei sistemului de vectori  $S$ .

Se observă că primul termen din relația (2.93) reprezintă vectorul de poziție în raport cu originea al unui punct  $C_0$  din spațiul tridimensional al reperului  $OXYZ$ , vector perpendicular pe rezultanta sistemului de vectori  $S$  și pe momentul resultant în raport cu polul  $O$ :

$$\bar{r}_{C_0} = \overline{OC_0} = \bar{r}_0 = \frac{\bar{R} \times \bar{\mathcal{M}}_O}{\bar{R}^2}, \quad |\bar{r}_0| = \frac{|\bar{\mathcal{M}}_O|}{|\bar{R}|},\tag{2.94}$$

$$\bar{r}_0 \perp \bar{R} \quad \text{și} \quad \bar{r}_0 \perp \bar{\mathcal{M}}_O.\tag{2.95}$$

Paranteza din al doilea termen din relația (2.93) reprezintă proiecția vectorului de poziție  $\bar{r}_C$  al punctului  $C$  pe direcția rezultantei, conform definiției proiecției unui vector pe o axă ((1.32)):

$$\text{pr}_R(\bar{r}_C) = \frac{\bar{R} \cdot \bar{r}_C}{|\bar{R}|} = \bar{r}_C \cdot \bar{u}_R.\tag{2.96}$$

Conform (2.94) și (2.96), relația (2.93) se scrie sub forma unei ecuații vectoriale cu o infinitate de soluții:

$$\bar{r}_C = \bar{r}_{C_0} + \bar{u}_R \cdot \text{pr}_R(\bar{r}_C), \quad \bar{r}_{C_0} \perp \bar{R}\tag{2.97}$$

având reprezentarea grafică dată în figura II.8, unde  $\overline{C_0C}$  este un vector coliniar cu rezultanta:

$$\overline{C_0C} = (\text{pr}_R(\bar{r}_C)) \cdot \bar{u}_R\tag{2.98}$$

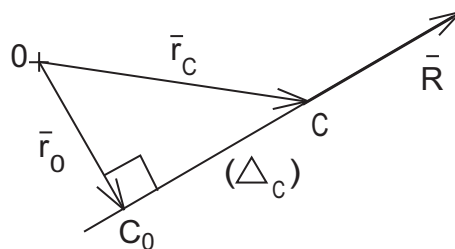


Figura II.8. Axa centrală a unui SVA

Notând  $\lambda' = \text{pr}_R(\bar{r}_C)$ , parametru real, ecuația (2.97) se scrie sub forma

$$(\Delta_C) : \bar{r}_C = \bar{r}_{C_0} + \lambda' \cdot \bar{u}_R, \quad \lambda' \in \mathbb{R}\tag{2.99}$$

și reprezintă ecuația vectorială a unei drepte în spațiul tridimensional al reperului  $OXYZ$  ([5], [24], [29]), locul geometric al punctului  $C$ . Această dreaptă se numește axa centrală a sistemului de vectori și se notează  $(\Delta_C)$ .

Înlocuind în (2.99) vectorul de poziție al punctului  $C_0$  și versorul rezultantei conform (2.94), respectiv (2.93), se obține pentru axa centrală ecuația

$$(\Delta_C) : \bar{r} = \frac{\bar{R} \times \bar{\mathcal{M}}_0}{\bar{R}^2} + \lambda \cdot \bar{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (2.100)$$

unde  $\lambda$  este un parametru real ( $\lambda = \lambda' / |\bar{R}|$ ).

Ecuția (2.100) reprezintă ecuația vectorială a unei drepte paralele cu direcția rezultantei.

**Definiția 2.5** Axa centrală a unui sistem de vectori alunecători este locul geometric al punctelor  $C$  din domeniul de definiție al vectorilor în raport cu care momentul resultant calculat este paralel cu vectorul resultant

$$\bar{\mathcal{M}}_C \parallel \bar{R}, \quad (2.101)$$

acest moment având valoarea minimă.

Proiecția momentului resultant pe direcția rezultantei este o constantă a sistemului de vectori, conform relațiilor (2.16) și (2.89).

Momentul resultant minim al sistemului de vectori este momentul calculat în raport cu un punct oarecare al axei centrale. Expresia de calcul se obține înmulțind valoarea scalară (algebrică), dată ca proiecție a momentului resultant în polul  $O$  pe direcția rezultantei, cu versorul rezultantei:

$$\bar{\mathcal{M}}_{\min} = \bar{\mathcal{M}}_C = (\text{pr}_{\bar{R}} \bar{\mathcal{M}}_O) \cdot \bar{u}_R, \quad C \in (\Delta_C). \quad (2.102)$$

În conformitate cu relația (2.86) și cu notația din (2.93) rezultă

$$\bar{\mathcal{M}}_{\min} = \frac{\bar{R} \cdot \bar{\mathcal{M}}_O}{|\bar{R}|} \cdot \frac{\bar{R}}{|\bar{R}|} = \left( \frac{\bar{R} \cdot \bar{\mathcal{M}}_O}{|\bar{R}|^2} \right) \cdot \bar{R}. \quad (2.103)$$

**Observația 2.13** Relația (2.103) este valabilă indiferent de polul de calcul al momentului resultant.

Pe baza momentului resultant minim se poate da o definiție echivalentă a axei centrale.

**Definiția 2.6** Axa centrală a unui sistem de vectori alunecători este dreapta suport a momentului resultant minim, cu condiția ca acesta să fie nenul.

În funcție de cele patru cazuri de reducere ale sistemelor de vectori alunecători se pot enunța următoarele concluzii asupra axei centrale.

1. În cazul SVA în echilibru (echivalent cu zero) nu se definește axa centrală.
2. În cazul SVA echivalent cu un cuplu de vectori nu se definește axa centrală, deoarece momentul resultant este același în orice punct și este un vector liber.



3. În cazul SVA echivalent cu un vector unic, momentul rezultat minim este nul. În acest caz axa centrală este dreapta suport a rezultantei, care este vector alunecător.
4. În cazul SVA echivalent cu un torsor propriu zis, rezultanta este un vector liber, iar axa centrală este dreapta suport a momentului rezultat minim, care este vector alunecător.

În figura II.9 s-a reprezentat axa centrală ( $\Delta_C$ ) a unui sistem de vectori alunecători echivalent cu un torsor propriu-zis. Proiecția momentului rezultat pe direcția rezultantei este o constantă a sistemului de vectori, egală cu momentul rezultat minim.

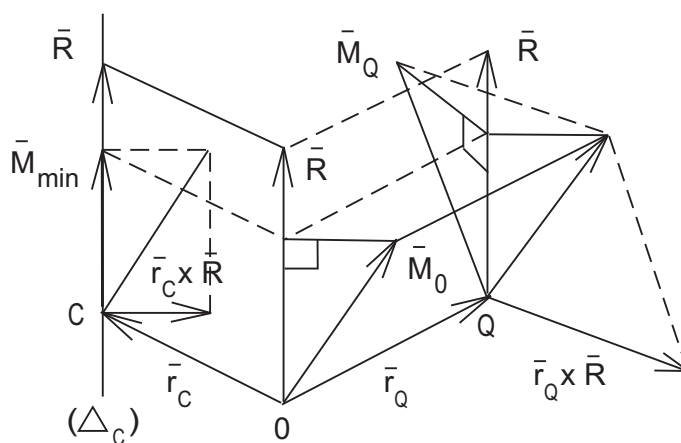


Figura II.9. Axa centrală a unui SVA torsor propriu-zis

Calculând rezultanta și momentul rezultat în polul  $O$  ale sistemului de vectori  $S$  conform relațiilor (2.2) și (2.4), ecuațiile scalare ale axei centrale se obțin considerând expresiile analitice ale rezultantei și momentului rezultat:

$$\begin{aligned}\bar{R} &= R_x \cdot \bar{i} + R_y \cdot \bar{j} + R_z \cdot \bar{k}, \\ \bar{M}_O &= \mathcal{M}_{Ox} \cdot \bar{i} + \mathcal{M}_{Oy} \cdot \bar{j} + \mathcal{M}_{Oz} \cdot \bar{k},\end{aligned}\tag{2.104}$$

unde  $R_x, R_y, R_z$  reprezintă componentele scalare ale rezultantei și  $\mathcal{M}_{Ox}, \mathcal{M}_{Oy}, \mathcal{M}_{Oz}$  componentele scalare ale momentului rezultat în polul  $O$ .

Înlocuind (2.104) în (2.100) se obțin pentru axa centrală a sistemului  $S$  următoarele ecuații scalare:

$$\begin{aligned}x &= \frac{R_y \cdot \mathcal{M}_{Oz} - R_z \cdot \mathcal{M}_{Oy}}{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} + \lambda \cdot R_x, \\ y &= \frac{R_z \cdot \mathcal{M}_{Ox} - R_x \cdot \mathcal{M}_{Oz}}{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} + \lambda \cdot R_y, \\ z &= \frac{R_x \cdot \mathcal{M}_{Oy} - R_y \cdot \mathcal{M}_{Ox}}{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} + \lambda \cdot R_z,\end{aligned}\tag{2.105}$$

unde  $\lambda$  este un parametru real,  $\lambda \in \mathbb{R}$  și  $x, y, z$  sunt coordonatele unui punct  $C$  aparținând axei centrale ( $\Delta_C$ ).

**Definiția 2.7** Se numește *torsor minim* sau *torsor minimal* al sistemului de vectori alunecători  $S$  mulțimea compusă din rezultantă și momentul rezultat minim, notată prin simbolul:

$$T_{\min}(S) = \{\bar{R}, \bar{\mathcal{M}}_{\min}\}. \quad (2.106)$$

Momentul rezultat minim se calculează cu relația (2.103).

**Observația 2.14** Torsorul minim se raportează la punctele axei centrale.

## II.10. Cazuri particulare de sisteme de vectori alunecători

Se studiază două cazuri particulare de sisteme de vectori alunecători, sistemele de vectori coplanari și sistemele de vectori paraleli, care pot fi coplanari sau necoplanari. Aceste sisteme particulare de vectori alunecători intervin în studiul static și dinamic al corpurilor solide rigide, de asemenea în disciplinele de Rezistența Materialelor și Mecanica Fluidelor.

### II.10.1. Sisteme de vectori coplanari

Se consideră un sistem de vectori alunecători coplanari

$$S = \{\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n\} \quad (2.107)$$

raportat la un reper triortogonal  $OXYZ$ , cu versorii axelor de coordonate  $OX, OY, OZ$  notați  $\bar{i}, \bar{j}$ , respectiv  $\bar{k}$ , astfel încât planul vectorilor să coincidă cu planul  $OXY$  al reperului.

Dreptele suport ale vectorilor (forțelor), notate  $(\Delta_1), (\Delta_2), \dots, (\Delta_n)$ , sunt conținute în planul  $OXY$ , plan ce intersectează volumul geometric al unui corp solid rigid asupra căruia acționează sistemul de vectori.

În această ipoteză, forțele sistemului se scriu sub forma

$$\bar{F}_\mu = F_{\mu x} \cdot \bar{i} + F_{\mu y} \cdot \bar{j}, \quad \mu = \overline{1, n}, \quad (2.108)$$

având câte două componente, pe  $OX$  și pe  $OY$ .

Momentele forțelor sistemului în raport cu polul  $O$  (originea reperului) se scriu sub forma

$$\bar{M}_O(\bar{F}_\mu) = \bar{OP}_\mu \times \bar{F}_\mu = M_O(\bar{F}_\mu) \cdot \bar{k}, \quad P_\mu \in (\Delta_\mu), \quad \mu = \overline{1, n}, \quad (2.109)$$

fiind vectori pe axa  $OZ$ , conform definiției produsului vectorial, deoarece vectorii factori  $\bar{OP}_\mu$  și  $\bar{F}_\mu$  sunt conținuți în planul  $OXY$ .

Rezultanta sistemului este ((2.2)):

$$\bar{R} = \sum_{\mu=1}^n \bar{F}_\mu = \sum_{\mu=1}^n F_{\mu x} \cdot \bar{i} + \sum_{\mu=1}^n F_{\mu y} \cdot \bar{j}, \quad (2.110)$$

iar momentul rezultat în raport cu polul  $O$  este ((2.4)):

$$\overline{\mathcal{M}}_O = \sum_{\mu=1}^n \overline{M}_O(\overline{F}_\mu) = \sum_{\mu=1}^n M_O(\overline{F}_\mu) \cdot \overline{k}. \quad (2.111)$$

Al doilea invariant scalar al sistemului este nul

$$I_2 = \overline{R} \cdot \overline{\mathcal{M}}_O = 0, \quad (2.112)$$

conform relațiilor (2.110) și (2.111), fiind produsul scalar a doi vectori perpendiculari.

Conform (2.110), (2.111) și (2.112) sistemul este echivalent cu un vector unic – cazul al treilea de reducere. Axa centrală este dreapta suport a rezultantei  $\overline{R}$ , care este vector alunecător.

Rezultanta și momentul rezultat în raport cu polul  $O$  se scriu sub formele analitice:

$$\overline{R} = R_x \cdot \overline{i} + R_y \cdot \overline{j}, \quad \overline{\mathcal{M}}_O = \mathcal{M}_{Oz} \cdot \overline{k}, \quad (2.113)$$

unde componentele scalare ale rezultantei și momentului rezultat sunt date în relațiile (2.110) și (2.111):

$$R_x = \sum_{\mu=1}^n F_{\mu x}, \quad R_y = \sum_{\mu=1}^n F_{\mu y}, \quad \mathcal{M}_{Oz} = \sum_{\mu=1}^n M_O(\overline{F}_\mu). \quad (2.114)$$

Înlocuind (2.114) în relația (2.100) se obține pentru axa centrală a sistemului ecuația:

$$(\Delta_C) : \overline{r} = \frac{\lambda \cdot R_x + R_y \cdot \mathcal{M}_{Oz}}{R_x^2 + R_y^2} \cdot \overline{i} + \frac{\lambda \cdot R_y - R_x \cdot \mathcal{M}_{Oz}}{R_x^2 + R_y^2} \cdot \overline{j}, \quad (2.115)$$

sau încă, prin eliminarea parametrului real  $\lambda$ :

$$(\Delta_C) : x \cdot R_y - y \cdot R_x = \mathcal{M}_{Oz}, \quad (2.116)$$

unde  $(x, y)$  sunt coordonatele în planul  $OXY$  ale unui punct oarecare  $C$  aparținând axei centrale  $(\Delta_C)$ , care este dreapta suport a rezultantei.

Ecuația (2.116) este ecuația unei drepte conținută în planul  $OXY$  și se poate obține în acest caz de reducere și prin aplicarea teoremei lui Varignon.

### II.10.2. Sisteme de vectori paraleli

Se consideră un sistem de vectori alunecători paraleli

$$S = \{\overline{F}_1, \overline{F}_2, \dots, \overline{F}_n\} \quad (2.117)$$

raportat la un reper triortogonal  $OXYZ$  cu versorii axelor de coordonate  $OX, OY, OZ$  notați  $\overline{i}, \overline{j}$ , respectiv  $\overline{k}$ .

Dreptele suport ale vectorilor (forțelor), notate  $(\Delta_1), (\Delta_2), \dots, (\Delta_n)$ , sunt paralele:

$$(\Delta_1) \parallel (\Delta_2) \parallel \dots \parallel (\Delta_n), \quad (2.118)$$

fiind conținute într-un domeniu  $D$  al spațiului tridimensional, domeniu ce corespunde volumului geometric al unui corp solid rigid asupra căruia acționează sistemul de vectori.

Se notează  $\bar{u}$  versorul direcției comune a vectorilor sistemului (vector liber). În cazul cel mai general versorul  $\bar{u}$  are expresia analitică:

$$\bar{u} = \alpha \cdot \bar{i} + \beta \cdot \bar{j} + \gamma \cdot \bar{k}, \quad (2.119)$$

unde  $\alpha$ ,  $\beta$  și  $\gamma$  sunt cosinusurile directoare care satisfac relația ([11], [12])

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1. \quad (2.120)$$

În această ipoteză, forțele sistemului se scriu sub forma

$$\bar{F}_\mu = F_\mu \cdot \bar{u}, \quad \mu = \overline{1, n}, \quad (2.121)$$

unde  $F_\mu$  sunt valorile algebrice ale acestora.

Avem:

$$\begin{cases} F_\mu > 0, & \text{dacă } \bar{F}_\mu \cdot \bar{u} > 0 \\ F_\mu < 0, & \text{dacă } \bar{F}_\mu \cdot \bar{u} < 0 \end{cases}, \quad \mu = \overline{1, n},$$

adică valoarea algebrică este pozitivă dacă forța are același sens cu versorul și negativă dacă forța are sens contrar versorului.

Cu relațiile (2.121) momentele forțelor în raport cu polul  $O$  se scriu sub forma

$$\vec{M}_O(\bar{F}_\mu) = \bar{r}_\mu \times \bar{F}_\mu = \bar{r}_\mu \times F_\mu \cdot \bar{u}, \quad (2.122)$$

unde  $\bar{r}_\mu = \overline{OP}_\mu$ ,  $P_\mu \in (\Delta_\mu)$ ,  $\mu = \overline{1, n}$  și sunt vectori perpendiculari pe direcția comună a forțelor, conform definiției produsului vectorial.

Rezultanta sistemului este ((2.2)):

$$\bar{R} = \sum_{\mu=1}^n \bar{F}_\mu = \sum_{\mu=1}^n F_\mu \cdot \bar{u}, \quad (2.123)$$

iar momentul rezultat în raport cu polul  $O$  este ((2.4)):

$$\bar{\mathcal{M}}_O = \sum_{\mu=1}^n \vec{M}_O(\bar{F}_\mu) = \left( \sum_{\mu=1}^n F_\mu \cdot \bar{r}_\mu \right) \times \bar{u}. \quad (2.124)$$

Rezultanta este un vector paralel cu direcția comună a forțelor, iar momentul rezultat în polul  $O$  este perpendicular pe direcția comună a forțelor, conform definiției produsului vectorial:

$$\bar{R} \parallel \bar{u} \text{ și } \bar{\mathcal{M}}_O \perp \bar{u}. \quad (2.125)$$

Al doilea invariant scalar al sistemului este nul

$$I_2 = \bar{R} \cdot \bar{\mathcal{M}}_O = 0, \quad (2.126)$$

fiind produsul scalar a doi vectori perpendiculari, conform (2.125).

Conform (2.123), (2.124) și (2.126) sistemul este echivalent cu un vector unic – cazul al treilea de reducere. Axa centrală este dreapta suport a rezultantei  $\overline{R}$ , care este vector alunecător.

Ecuția axei centrale se obține în acest caz de reducere prin aplicarea teoremei lui Varignon:

$$\overline{M}_O = \overline{M}_O(\overline{R}), \quad (2.127)$$

momentul rezultat al sistemului în polul  $O$  este egal cu momentul vectorului rezultat în polul  $O$ .

Se notează  $C$  un punct oarecare de pe axa centrală  $(\Delta_C)$ ,  $C \in (\Delta_C)$ . Avem:

$$\overline{M}_O(\overline{R}) = \overline{r}_C \times \overline{R}, \quad \overline{r}_C = \overline{OC}. \quad (2.128)$$

Conform (2.124), (2.127) și (2.128) rezultă:

$$\overline{r}_C \times \overline{R} = \left( \sum_{\mu=1}^n F_\mu \cdot \overline{r}_\mu \right) \times \overline{u}. \quad (2.129)$$

Înlocuind (2.123) în (2.129) se obține

$$\left( \sum_{\mu=1}^n F_\mu \right) \cdot \overline{r}_C \times \overline{u} = \left( \sum_{\mu=1}^n F_\mu \cdot \overline{r}_\mu \right) \times \overline{u}, \quad (2.130)$$

ecuație vectorială a cărei soluție reprezintă ecuația axei centrale (suportul rezultantei):

$$(\Delta_C) : \overline{r}_C = \frac{\sum_{\mu=1}^n F_\mu \cdot \overline{r}_\mu}{\sum_{\mu=1}^n F_\mu} + \lambda \cdot \overline{u}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (2.131)$$

unde  $\overline{r}_C$  este vectorul de poziție al unui punct oarecare  $C$  aparținând axei centrale, definit în relația (2.128), valorile algebrice ale forțelor  $F_\mu$ ,  $\mu = \overline{1, n}$  sunt definite în relația (2.121), vectorii de poziție  $\overline{r}_\mu$  sunt definiți în relația (2.122):

$$\overline{r}_\mu = \overline{OP}_\mu, \quad P_\mu \in (\Delta_\mu), \quad \mu = \overline{1, n},$$

iar  $\lambda$  este un parametru real.

Axa centrală este o dreaptă paralelă cu direcția comună a forțelor.

Pentru a obține ecuațiile scalare ale axei centrale se stabilesc coordonatele punctelor  $P_\mu$ ,  $\mu = \overline{1, n}$  de pe dreptele suport ale forțelor în reperul  $OXYZ$  considerat:

$$P_\mu(x_\mu, y_\mu, z_\mu) \in (\Delta_\mu), \quad \mu = \overline{1, n}, \quad (2.132)$$

coordonate cu care vectorii de poziție se scriu sub forma

$$\overline{r}_\mu = x_\mu \cdot \overline{i} + y_\mu \cdot \overline{j} + z_\mu \cdot \overline{k}, \quad \mu = \overline{1, n}. \quad (2.133)$$

Înlocuind (2.119) și (2.133) în (2.131) se obțin pentru axa centrală a sistemului următoarele ecuații scalare:

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{1}{\sum_{\mu=1}^n F_\mu} \left( \sum_{\mu=1}^n F_\mu \cdot x_\mu \right) + \lambda \cdot \alpha, \\ y_C &= \frac{1}{\sum_{\mu=1}^n F_\mu} \left( \sum_{\mu=1}^n F_\mu \cdot y_\mu \right) + \lambda \cdot \beta, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ z_C &= \frac{1}{\sum_{\mu=1}^n F_\mu} \left( \sum_{\mu=1}^n F_\mu \cdot z_\mu \right) + \lambda \cdot \gamma, \end{aligned} \quad (2.134)$$

unde  $\lambda$  este un parametru real și  $x_C, y_C, z_C$  sunt coordonatele unui punct oarecare  $C$  aparținând axei centrale  $(\Delta_C)$ .

În relația (2.122) punctele  $P_\mu$  aparținând dreptelor suport  $(\Delta_\mu)$ ,  $\mu = \overline{1, n}$  ale forțelor sunt alese arbitrar, conform definiției momentului polar.

Primul termen al sumei din relația (2.131) reprezintă vectorul de poziție al unui punct  $C_0$  al axei centrale  $(\Delta_C)$ :

$$\bar{r}_{C_0} = \overline{OC_0} = \frac{\sum_{\mu=1}^n F_\mu \cdot \bar{r}_\mu}{\sum_{\mu=1}^n F_\mu}, \quad C_0 \in (\Delta_C), \quad (2.135)$$

punct care depinde de alegerea punctelor  $P_\mu$  pe dreptele suport  $(\Delta_\mu)$ ,  $\mu = \overline{1, n}$  ale forțelor.

## II.11. Distribuții de forțe

În acest paragraf al cursului se studiază un alt caz particular de sisteme de vectori alunecători, anume cazul în care repartizarea forțelor nu este distinctă, ci continuă în spațiu. Dacă acțiunea forțelor se manifestă în mod continuu într-un domeniu dat al spațiului tridimensional, fără să existe drepte suport discret precizate, se aplică modelul fizic al distribuției de forțe.

O distribuție de forțe este un model fizic aplicat pentru a modela contactul fizic dintre două corpuri solide, rigide sau deformabile, sau efectul presiunii unui fluid asupra corpurilor solide.

În particular, modelul fizic al distribuției de forțe este aplicat în disciplinele de Rezistența Materialelor și Mecanica Fluidelor.

În disciplina de Rezistența Materialelor modelul distribuției de forțe este aplicat în cazul contactului dintre două corpuri solide (rigide).

În disciplina de Mecanica Fluidelor modelul distribuției de forțe este aplicat pentru a reprezenta acțiunea presiunii unui fluid asupra corpurilor solide: presiunea unui fluid

asupra pereților unui vas sau rezervor, presiunea apei asupra pieselor active ale unei pompe, presiunea unui gaz asupra unui piston sau asupra unei pale de turbină, presiunea apei asupra unui baraj etc.

În disciplinele tehnice, distribuțiile de forțe sunt aplicate pentru a modela contactul fizic dintre piesele îmbinate (legături statice, reazeme, dispozitive de strângere, cuple cinematice etc.).

În cazul contactului fizic dintre două corpuri solide, acțiunea unui corp asupra celuilalt poate fi reprezentată prin modelul distribuției de forțe, adică o mulțime infinită de forțe de mărime infinit mică, distribuite continuu pe suprafața de contact dintre cele două corpuri, având direcțiile normale pe această suprafață în fiecare punct. Dacă suprafața de contact este o suprafață plană, distribuția de forțe constituie un sistem de vectori paraleli.

O distribuție de forțe este definită prin intensitatea  $q$ , mărime scalară variabilă pe suprafața de contact, care se măsoară în unități de forță pe unitate de suprafață  $\langle N/m^2 \rangle$ . Dacă intensitatea  $q$  are aceeași valoare în orice punct al suprafeței de contact, distribuția se numește uniformă.

În problemele de statică și de dinamică plană, adică în cazul în care forțele aplicate corpurilor și reacțiunile acestora sunt coplanare, nu este necesar să se considere întreaga suprafață de contact dintre două corpuri, ci numai latura suprafeței conținută în planul forțelor. Din acest motiv, în cursul de față se vor studia numai distribuțiile de forțe coplanare aplicate normal (perpendicular) pe o linie materială, în particular pe o bară rigidă rectilinie. O astfel de distribuție de forțe constituie un sistem de vectori paraleli, având intensitatea măsurată în newtoni pe metru  $\langle N/m \rangle$ .

### II.11.1. Distribuția oarecare de forțe paralele

Se consideră o bară dreaptă rigidă  $AB$ , de lungime  $\ell \langle m \rangle$ , asupra căreia acționează o distribuție de forțe paralele în același sens, perpendiculare pe bară, de intensitate  $q \langle N/m \rangle$  variabilă pe lungimea barei.

Se raportează bara la un reper triortogonal  $OXYZ$  cu originea în  $A$  și cu axa  $OX$  pe direcția barei, astfel încât bara să fie pe semiaxa pozitivă și planul  $OXY$  să coincidă cu planul distribuției de forțe (Fig. II.10). Notarea versorilor este cea curentă  $(OX, OY, OZ - \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

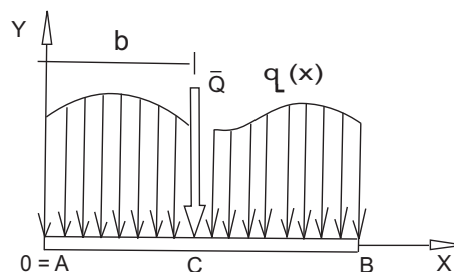


Figura II.10. Distribuția oarecare de forțe

Este cunoscută funcția

$$q = q(x), \quad x \in [0, \ell], \quad \langle q \rangle = \frac{N}{m}, \quad (2.136)$$

intensitatea distribuției de forțe pe lungimea barei, funcție continuă, bijectivă și integrabilă conform definiției Riemann ([1], [16], [23]) pe intervalul  $[0, \ell]$ .

Forțele distribuției au direcția axei  $OY$ . Dacă forțele acționează în același sens în fiecare punct al barei, funcția  $q(x)$  este pozitiv definită.

Distribuția de forțe constituie un sistem de vectori paraleli cu axa  $OY$  în sens negativ și se reduce la o rezultantă unică conform II.10.2, notată  $\bar{Q}$ .

Asupra unui element de lungime infinit mică al barei ( $dx$ ), aflat la distanța  $x$  de origine, acționează forța elementară  $d\bar{Q}$ , egală cu produsul dintre intensitatea distribuției în acel punct  $q(x)$  și elementul de lungime:

$$dQ = q(x) \cdot dx \langle N \rangle, \quad d\bar{Q} = -dQ \cdot \bar{j}. \quad (2.137)$$

Rezultanta distribuției de forțe este dată de integrala Riemann a forței elementare ([1], [16], [23]):

$$Q = \int_0^\ell dQ = \int_0^\ell q(x) \cdot dx \langle N \rangle, \quad \bar{Q} = -Q \cdot \bar{j} \quad (2.138)$$

și este un vector paralel cu axa  $OY$  în sens negativ.

Momentul forței elementare în raport cu polul  $O$  (originea reperului) sau momentul elementar este definit de relația:

$$d\bar{\mathcal{M}}_O = \bar{r} \times d\bar{Q} \langle N \cdot m \rangle, \quad \bar{r} = x \cdot \bar{i}, \quad (2.139)$$

unde  $\bar{r}$  este vectorul de poziție al elementului de bară pe care acționează forța elementară.

Momentul rezultat al distribuției de forțe în raport cu polul  $O$  este dat de integrala Riemann a momentului elementar ([1], [16], [23]):

$$\bar{\mathcal{M}}_O = \int_0^\ell d\bar{\mathcal{M}}_O = \int_0^\ell \bar{r} \times d\bar{Q} \langle N \cdot m \rangle. \quad (2.140)$$

Din (2.137), (2.139) și (2.140) se obține pentru momentul rezultat în polul  $O$ :

$$\bar{\mathcal{M}}_O = \int_0^\ell x \cdot \bar{i} \times (-q(x)dx \cdot \bar{j}), \quad \bar{\mathcal{M}}_O = - \int_0^\ell x \cdot q(x)dx \cdot (\bar{i} \times \bar{j}),$$

sau încă, înlocuind produsul vectorial al versorilor conform (1.65):

$$\bar{\mathcal{M}}_O = - \int_0^\ell x \cdot q(x)dx \cdot \bar{k} \langle N \cdot m \rangle \quad (2.141)$$

și este un vector pe axa  $OZ$ , în sens negativ.

Punctul de aplicație al rezultantei  $Q$  este un punct al barei, notat  $C$ . Pentru determinarea acestuia se aplică teorema lui Varignon distribuției de forțe, momentul rezultat în raport cu polul  $O$  este egal cu momentul vectorului rezultat în polul  $O$ :

$$\bar{\mathcal{M}}_O = \bar{M}_O(\bar{Q}). \quad (2.142)$$



Momentul rezultantei în raport cu polul  $O$  este dat de relația

$$\overline{M}_O(\overline{Q}) = \overline{r}_C \times \overline{Q} \langle N \cdot m \rangle, \quad (2.143)$$

unde  $\overline{r}_C$  este vectorul de poziție al punctului  $C$ .

Notând  $b$  brațul rezultantei (abscisa punctului  $C$ ), avem

$$\overline{r}_C = b \cdot \overline{i}, \quad b = OC = AC. \quad (2.144)$$

Din (2.143) și (2.144) rezultă

$$\overline{M}_O(\overline{Q}) = b \cdot \overline{i} \times \overline{Q}. \quad (2.145)$$

Din (2.138) și (2.145) se obține pentru momentul rezultantei

$$\overline{M}_O(\overline{Q}) = -b \int_0^\ell q(x) dx \cdot (\overline{i} \times \overline{j}),$$

sau încă, înlocuind produsul vectorial al versorilor conform (1.65):

$$\overline{M}_O(\overline{Q}) = -b \int_0^\ell q(x) dx \cdot \overline{k} \langle N \cdot m \rangle, \quad (2.146)$$

Din (2.141), (2.142) și (2.146) rezultă

$$b = \frac{\int_0^\ell x \cdot q(x) dx}{\int_0^\ell q(x) dx} \langle m \rangle, \quad (2.147)$$

relație care dă poziția punctului de aplicație al rezultantei pe bară (brațul rezultantei).

În continuare se prezintă două cazuri particulare de distribuții de forțe paralele.

### II.11.2. Distribuția uniformă de forțe paralele

Se consideră o bară dreaptă rigidă  $AB$ , de lungime  $\ell \langle m \rangle$ , asupra căreia acționează o distribuție de forțe paralele în același sens, perpendiculare pe bară, de intensitate constantă  $q \langle N/m \rangle$  pe lungimea barei.

Se raportează bara la un reper triortogonal  $OXYZ$  cu originea în  $A$  și axa  $OX$  pe direcția barei, astfel încât bara să fie pe semiaxa pozitivă și planul  $OXY$  să coincidă cu planul distribuției de forțe (Fig. II.11).

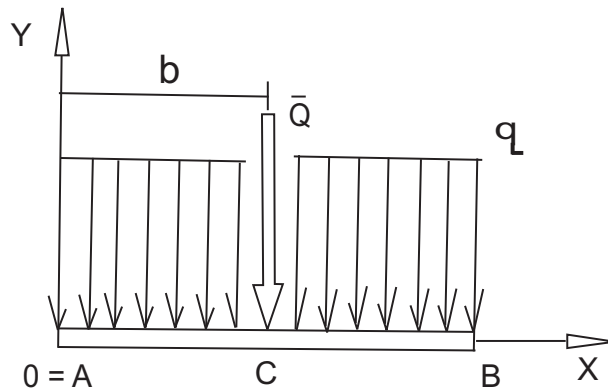


Figura II.11. Distribuția uniformă de forțe paralele

Avem:

$$q = q(x) = \text{const.} \left\langle \frac{N}{m} \right\rangle, \quad x \in [0, \ell]. \quad (2.148)$$

Conform (2.138) rezultanta distribuției este

$$Q = q \cdot \ell \langle N \rangle, \quad (2.149)$$

iar brațul rezultantei în raport cu polul  $O$  este conform (2.147):

$$b = \frac{\ell}{2} \langle m \rangle. \quad (2.150)$$

### II.11.3. Distribuția liniară de forțe paralele

Se consideră o bară dreaptă rigidă  $AB$ , de lungime  $\ell \langle m \rangle$ , asupra căreia acționează o distribuție de forțe paralele în același sens, perpendiculare pe bară, de intensitate liniară variabilă pe lungimea barei. Intensitatea distribuției este nulă în punctul  $A$  și egală cu  $q_0 \langle N/m \rangle$  în punctul  $B$ .

Se raportează bara la un reper triortogonal  $OXYZ$  cu originea în  $A$  și axa  $OX$  pe direcția barei, astfel încât bara să fie pe semiaxa pozitivă și planul  $OXY$  să coincidă cu planul distribuției de forțe (Fig. II.12).

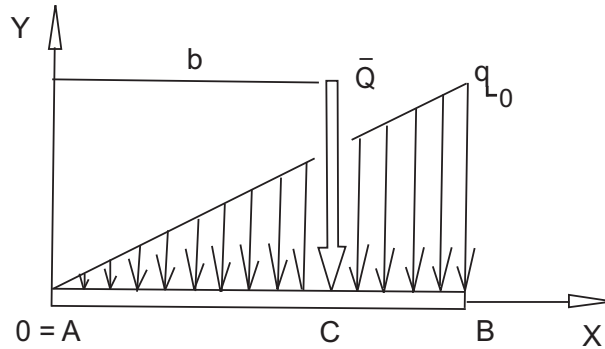


Figura II.12. Distribuția liniară de forțe paralele

Avem

$$q = q(x) = q_0 \cdot \frac{x}{\ell} \left\langle \frac{N}{m} \right\rangle, \quad x \in [0, \ell]. \quad (2.151)$$

Conform (2.138) rezultanta distribuției este

$$Q = \frac{1}{2} q_0 \cdot \ell \langle N \rangle, \quad (2.152)$$

iar brațul rezultantei în raport cu polul  $O$  este conform (2.147):

$$b = \frac{2}{3} \ell \langle m \rangle. \quad (2.153)$$

## Capitolul III

### CENTRE DE GREUTATE

După cum s-a menționat în *Introducere*, paragraful *Modele simplificatoare ale mecanicii*, există două modele de bază ale mecanicii clasice, corpul solid rigid și punctul material. Centrul de greutate este o noțiune fizică care se definește în cazul modelului de corp material solid și în cazul modelului de sistem de puncte materiale.

În cazul unui corp material solid, rigid sau deformabil, centrul de greutate se definește în condițiile în care corpul are o masă finită (măsurabilă), dimensiuni finite (măsurabile) și o formă geometrică precizată. Centrul de greutate este punctul convențional de aplicație al forței de greutate a corpului, considerată ca vector legat. Centrul de greutate există în condițiile prezenței unui câmp gravitațional, adică în cazul corpurilor solide aflate în câmpul gravitațional terestru. În absența câmpului gravitațional, noțiunea de *centru de greutate* este înlocuită cu noțiunea de *centru de masă* sau *centrul maselor*, care este în legătură cu proprietatea de inerție a materiei.

Noțiunea de centru de masă în cazul unui corp solid sau centrul maselor în cazul unui sistem de corpuri are un caracter mai general decât noțiunea de centru de greutate.

Pentru a obține relația de calcul a centrului de greutate al unui corp material solid se vor aplica rezultatele demonstrate în II.10.2, *Sisteme de vectori paraleli*.

Așa cum s-a menționat în *Introducere*, paragraful *Modele simplificatoare ale mecanicii*, punctul material este modelul prin care se atribuie o masă (finită) unui punct din spațiul tridimensional.

#### III.1. Centrul de greutate al unui sistem de puncte materiale

Se consideră un sistem de  $n$  puncte materiale

$$S_0 = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}, \quad (3.1)$$

având masele  $m_1, m_2, \dots$ , respectiv  $m_n$ .

Se raportează sistemul de puncte materiale  $S_0$  la un reper triortogonal  $OXYZ$  cu versorii axelor  $OX, OY, OZ$  notați  $\vec{i}, \vec{j}$  respectiv  $\vec{k}$ , cu axa  $OZ$  în poziție verticală. Se cunosc coordonatele pozițiilor punctelor materiale în reperul  $OXYZ$ :

$$P_\mu(x_\mu, y_\mu, z_\mu), \quad \mu = \overline{1, n}, \quad (3.2)$$

coordonate care dau expresiile analitice ale vectorilor de poziție ai punctelor materiale:

$$\vec{r}_\mu = \overline{OP}_\mu = x_\mu \cdot \vec{i} + y_\mu \cdot \vec{j} + z_\mu \cdot \vec{k}, \quad \mu = \overline{1, n}. \quad (3.3)$$

În câmpul gravitațional terestru, asupra fiecărui punct material aparținând sistemului  $S_0$  acționează forța de greutate:

$$\overline{G}_\mu = m_\mu \cdot \overline{g}, \quad \mu = \overline{1, n}, \quad (3.4)$$

unde  $\overline{g}$  reprezintă accelerația gravitațională, vector liber având direcția verticală și sensul în jos, adică pe axa  $OZ$  în sens negativ.

Forțele de greutate ale punctelor materiale ale sistemului  $S_0$  constituie un sistem de forțe paralele de același sens:

$$S = \{\overline{G}_1, \overline{G}_2, \dots, \overline{G}_n\}, \quad (3.5)$$

fiind vectori legați de punctele  $P_1, P_2, \dots$ , respectiv  $P_n$ .

Versorul direcției comune a forțelor de greutate este  $\overline{k}$ , versorul axei  $OZ$ , conform alegerii reperului.

Conform II.10.2, sistemul de forțe paralele  $S$  se reduce la o rezultantă unică, care este forța de greutate totală a sistemului de puncte materiale:

$$\overline{G} = \overline{G}_1 + \overline{G}_2 + \dots + \overline{G}_n = \sum_{\mu=1}^n \overline{G}_\mu. \quad (3.6)$$

În aceste condiții se pune problema determinării centrului de greutate al sistemului de puncte materiale  $S_0$ , care este punctul convențional de aplicație al forței de greutate totală considerată ca vector legat, rezultanta sistemului de forțe  $S$ .

Conform II.10.2, rezultanta unui sistem de vectori alunecători paraleli este un vector alunecător având ca dreaptă suport axa centrală a sistemului. Concluzia este valabilă și pentru sistemul de vectori legați  $S$  definit în (3.5). Condițiile de legătură ale forțelor de greutate  $\overline{G}_\mu$  de punctele de aplicație  $P_\mu$ ,  $\mu = \overline{1, n}$ , intervin în calcularea momentelor acestor forțe.

Conform (2.131), ecuația suportului rezultantei  $\overline{G}$  a sistemului forțelor de greutate  $S$  este:

$$(\Delta) : \overline{r} = \frac{\sum_{\mu=1}^n G_\mu \cdot \overline{r}_\mu}{\sum_{\mu=1}^n G_\mu} + \lambda \cdot \overline{k}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (3.7)$$

unde  $G_\mu$  sunt valorile algebrice (scalare) ale forțelor de greutate, negativ definite conform alegerii reperului:

$$G_\mu = -m_\mu \cdot g, \quad \mu = \overline{1, n}, \quad (3.8)$$

vectorii  $\overline{r}_\mu$ ,  $\mu = \overline{1, n}$ , sunt definiți de relațiile (3.3), iar  $\lambda$  este un parametru real.

Primul termen din relația (3.7) reprezintă vectorul de poziție al unui punct  $C$  de pe suportul rezultantei:

$$\overline{r}_C = \frac{\sum_{\mu=1}^n m_\mu \overline{r}_\mu}{\sum_{\mu=1}^n m_\mu}, \quad (3.9)$$

relație în care s-au înlocuit forțele de greutate conform (3.8).

Între punctele  $O$  (originea reperului),  $C$  și  $P_\mu$ ,  $\mu = \overline{1, n}$ , se scriu următoarele relații vectoriale (legile de variație ale coordonatelor la translația axelor):

$$\overline{OP}_\mu = \overline{OC} + \overline{CP}_\mu, \quad \bar{r}_\mu = \bar{r}_C + \overline{CP}_\mu, \quad \mu = \overline{1, n}. \quad (3.10)$$

Înlocuind (3.10) în (3.9), avem

$$\sum_{\mu=1}^n m_\mu \cdot \bar{r}_C = \sum_{\mu=1}^n m_\mu \cdot (\bar{r}_C + \overline{CP}_\mu),$$

de unde rezultă

$$\sum_{\mu=1}^n m_\mu \cdot \overline{CP}_\mu = \bar{0}. \quad (3.11)$$

În continuare se demonstrează că punctul  $C$  este unic determinat pentru sistemul de puncte materiale  $S_0$ , adică există un singur punct  $C$  care verifică relația (3.11).

Între punctele  $C, P_1, P_2, \dots, P_n$  se scriu următoarele relații vectoriale:

$$\overline{CP}_\mu = \overline{CP}_1 + \overline{P_1P}_\mu, \quad \mu = \overline{2, n}. \quad (3.12)$$

Înlocuind (3.12) în (3.11), avem

$$\sum_{\mu=1}^n m_\mu \cdot \overline{CP}_1 + \sum_{\mu=2}^n m_\mu \cdot \overline{P_1P}_\mu = \bar{0},$$

de unde rezultă

$$\overline{P_1C} = \frac{1}{\sum_{\mu=1}^n m_\mu} \cdot \left( \sum_{\mu=2}^n m_\mu \cdot \overline{P_1P}_\mu \right), \quad (3.13)$$

relație care dă vectorul de poziție al punctului  $C$  în raport cu punctul  $P_1$  în funcție de vectorii  $\overline{P_1P}_\mu$ ,  $\mu = \overline{2, n}$ , adică în funcție de pozițiile reciproce ale punctelor materiale din sistemul  $S_0$ .

Relația (3.13) arată că punctul  $C$  este unic determinat ca soluție a ecuației vectoriale (3.11) și nu depinde de reperul la care este raportat sistemul de puncte materiale.

Punctul  $C$  este o proprietate intrinsecă a sistemului de puncte materiale, adică poziția sa în sistem nu depinde de reperul de referință.

În concluzie, punctul  $C$  se consideră ca punct de aplicație al forței de greutate totală, rezultanta forțelor de greutate ale punctelor materiale din sistemul  $S_0$  definit în (3.1). Punctul  $C$  se numește *centrul de greutate al sistemului de puncte materiale*.

În ipoteza în care sistemul de puncte materiale  $S_0$  este raportat la un reper tri-ortogonal  $OXYZ$ , relația de calcul a centrului de greutate  $C$  este relația (3.9):

$$\overline{OC} = \bar{r}_C = \frac{\sum_{\mu=1}^n m_\mu \cdot \bar{r}_\mu}{\sum_{\mu=1}^n m_\mu}, \quad (3.14)$$

unde  $m_\mu$  sunt masele punctelor materiale, iar  $\bar{r}_\mu$ ,  $\mu = \overline{1, n}$ , sunt vectorii de poziție în reperul considerat.

În continuare se demonstrează că punctul  $C$  are aceeași poziție relativă în raport cu punctele materiale ale sistemului  $S_0$  indiferent de reperul de referință.

Se consideră sistemul de puncte materiale  $S_0$  definit în (3.1) raportat la două repere triortogonale distincte  $OXYZ$  și  $QX'Y'Z'$ . Centrul de greutate în reperul  $OXYZ$  se notează  $C$ , iar centrul de greutate în reperul  $QX'Y'Z'$  se notează  $C'$ . Conform (3.9) vectorii de poziție ai punctelor  $C$  și  $C'$  sunt dați de relațiile (Fig. III.1):

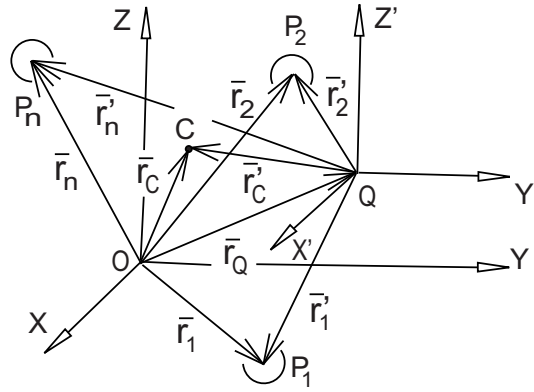


Figura III.1. Sistem de puncte materiale

$$\bar{r}_C = \overline{OC} = \frac{\sum_{\mu=1}^n m_\mu \cdot \bar{r}_\mu}{\sum_{\mu=1}^n m_\mu}, \quad \bar{r}_\mu = \overline{OP}_\mu, \quad (3.15)$$

$$\bar{r}'_{C'} = \overline{QC'} = \frac{\sum_{\mu=1}^n m_\mu \cdot \bar{r}'_\mu}{\sum_{\mu=1}^n m_\mu}, \quad \bar{r}'_\mu = \overline{QP}_\mu. \quad (3.16)$$

Între punctele  $O, Q$  și  $P_\mu$ ,  $\mu = \overline{1, n}$ , se scriu următoarele relații vectoriale (legile de variație ale coordonatelor la translația axelor între reperul  $OXYZ$  și un reper cu axele paralele cu originea în  $Q$ ):

$$\bar{r}_\mu = \overline{OQ} + \bar{r}'_\mu, \quad \mu = \overline{1, n}. \quad (3.17)$$

Înlocuind (3.17) în (3.15), se obține

$$\bar{r}_C = \overline{OC} = \frac{\sum_{\mu=1}^n m_\mu (\overline{OQ} + \bar{r}'_\mu)}{\sum_{\mu=1}^n m_\mu} = \overline{OQ} + \frac{\sum_{\mu=1}^n m_\mu \cdot \bar{r}'_\mu}{\sum_{\mu=1}^n m_\mu}. \quad (3.18)$$

Înlocuind (3.16) în (3.18), rezultă

$$\overline{OC} = \overline{OQ} + \overline{QC'}, \quad (3.19)$$

relație care arată că punctele  $C$  și  $C'$  coincid ca poziție, indiferent de reperul de referință.

### III.2. Centrul de greutate al unui corp material solid

Pentru corpurile materiale solide, rigide sau deformabile, centrul de greutate se determină în condițiile în care acestea au o masă finită (măsurabilă), dimensiuni finite (măsurabile) și o formă geometrică definită.

Un corp material solid este echivalent cu un sistem de puncte materiale infinite ca număr, distribuite continuu în spațiul geometric pe care îl ocupă, deoarece masa corpului este infinit divizibilă pe volum. Masa unui astfel de punct material este infinit mică,  $dm \rightarrow 0$ .

În cazul cel mai general, corpurile materiale solide sunt tridimensionale, având un volum finit ( $V$ ) și o masă finită ( $M$ ), distribuită în acel volum. Poziția centrului de greutate al unui corp material solid nu depinde de proprietățile de rigiditate sau de deformabilitate.

Se consideră un corp material solid ( $S$ ), rigid sau deformabil, raportat la un reper triortogonal  $OXYZ$  cu versorii axelor  $OX, OY, OZ$  notați  $\bar{i}, \bar{j}$ , respectiv  $\bar{k}$ . Masa finită a corpului ( $S$ ) se împarte într-un număr infinit de mase elementare,  $dm_\mu$ ,  $\mu = \overline{1, n}$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

Aplicând relația (3.14) pentru determinarea centrului de greutate al sistemului de puncte materiale constituit din masele elementare ale corpului ( $S$ ), avem:

$$\bar{r}_C = \frac{\sum_{\mu=1}^n dm_\mu \cdot \bar{r}_\mu}{\sum_{\mu=1}^n dm_\mu}, \quad (3.20)$$

relație care dă vectorul de poziție al centrului de greutate al corpului ( $S$ ) în reperul considerat.

Pentru  $n \rightarrow \infty$ , masele elementare sunt infinit mici,  $dm_\mu \rightarrow 0$ ,  $\mu = \overline{1, n}$ , iar relația (3.20) devine:

$$\bar{r}_C = \frac{\int_{(M)} \bar{r} \cdot dm}{\int_{(M)} dm} = \frac{1}{M} \int_{(M)} \bar{r} \cdot dm, \quad (3.21)$$

unde  $dm$  este elementul de masă (masa elementară) și s-a notat  $M$  masa corpului, mărime fizică scalară  $\langle Kg \rangle$ .

Integralele din relația (3.21) sunt integrale Stieltjes ([2], [8], [23]), având unele proprietăți similare integralei Riemann ([1], [16], [23]), definite pe domeniul masic (masa corpului).

Relația (3.21) este formula generală pentru determinarea centrului de greutate al corpurilor materiale solide, rigide sau deformabile. Relația are mai multe forme particulare, pentru corpuri omogene, care au aceeași densitate pe tot volumul și pentru corpuri omogene cu forme geometrice particulare.

Un corp material solid poate fi asimilat cu un sistem de puncte materiale infinite ca număr, distribuite continuu în volumul său. Masa și volumul unui astfel de punct material sunt infinit mici ( $dm, dV$ ) și sunt legate prin relația:

$$dm = \rho \cdot dV, \quad (3.22)$$

unde  $\rho$  este densitatea volumetrică a corpului în punctul respectiv, mărime fizică scalară  $\langle Kg/m^3 \rangle$ .

Un corp material solid este omogen dacă densitatea este aceeași în orice punct, adică constantă pe volumul corpului.

Înlocuind (3.22) în (3.21), se obține formula generală pentru determinarea centrului de greutate al corpurilor solide omogene:

$$\bar{r}_C = \frac{\int_{(D)} \bar{r} \cdot dV}{\int_{(D)} dV} = \frac{1}{V} \int_{(D)} \bar{r} \cdot dV, \quad (3.23)$$

unde ( $D$ ) este domeniul tridimensional al volumului corpului,  $dV$  este elementul de volum (volumul elementar) și s-a notat  $V$  volumul corpului, mărime scalară finită  $\langle m^3 \rangle$ .

Integralele din relația (3.23) sunt integrale de volum ([2], [8], [23]) definite pe domeniul tridimensional al volumului corpului (integrale Riemann triple).

Dacă una dintre cele trei dimensiuni ale corpului material solid este mică în raport cu celelalte două și poate fi neglijată, corpul solid se prezintă prin modelul de suprafață materială, care are o arie finită ( $A$ ) și o masă finită ( $M$ ) distribuită pe acea arie.

O suprafață materială ( $\Sigma$ ) poate fi asimilată cu un sistem de puncte materiale infinite ca număr, distribuite continuu pe aria sa. Masa și aria unui astfel de punct material sunt infinit mici ( $dm, dA$ ) și sunt legate prin relația

$$dm = \rho \cdot dA, \quad (3.24)$$

unde  $\rho$  este densitatea superficială în punctul respectiv, mărime fizică scalară  $\langle Kg/m^2 \rangle$ .

O suprafață materială este omogenă dacă densitatea este aceeași în orice punct, adică constantă pe aria suprafeței.

Înlocuind (3.24) în (3.21), se obține formula generală pentru determinarea centrului de greutate al suprafețelor materiale omogene:

$$\bar{r}_C = \frac{\int_{(\Sigma)} \bar{r} \cdot dA}{\int_{(\Sigma)} dA} = \frac{1}{A} \int_{(\Sigma)} \bar{r} \cdot dA, \quad (3.25)$$

unde ( $\Sigma$ ) este domeniul bidimensional al ariei suprafeței materiale,  $dA$  este elementul de arie (aria elementară) și s-a notat  $A$  aria suprafeței, mărime scalară finită  $\langle m^2 \rangle$ .

Integralele din relația (3.25) sunt integrale de suprafață ([2], [8], [23]) definite pe domeniul bidimensional al ariei suprafeței materiale. Dacă suprafața este plană, acestea sunt integrale Riemann duble.

Dacă două dintre dimensiunile corpului material solid sunt mici în raport cu cea de-a treia și pot fi neglijate, corpul solid se prezintă prin modelul de linie materială, care are o lungime finită ( $L$ ) și o masă finită ( $M$ ) distribuită pe acea lungime.



O linie materială ( $\Gamma$ ) poate fi asimilată cu un sistem de puncte materiale infinite ca număr, distribuite continuu pe lungimea sa. Masa și lungimea unui astfel de punct material sunt infinit mici ( $dm, ds$ ) și sunt legate prin relația

$$dm = \rho \cdot ds, \quad (3.26)$$

unde  $\rho$  este densitatea liniară în punctul respectiv, mărime fizică scalară ( $Kg/m$ ).

O linie materială este omogenă dacă densitatea este aceeași în orice punct, adică constantă pe lungimea sa.

Înlocuind (3.26) în (3.21), se obține formula generală pentru determinarea centrului de greutate al liniilor materiale omogene:

$$\bar{r}_C = \frac{\int_{(\Gamma)} \bar{r} \cdot ds}{\int_{(\Gamma)} ds} = \frac{1}{L} \int_{(\Gamma)} \bar{r} \cdot ds, \quad (3.27)$$

unde ( $\Gamma$ ) este domeniul unidimensional al lungimii liniei materiale, adică curba de contur a liniei,  $ds$  este elementul de curbă (lungimea elementară) și s-a notat  $L$  lungimea liniei, mărime scalară finită ( $m$ ).

Integralele din relația (3.27) sunt integrale curbilini ([2], [8], [23]) definite pe domeniul unidimensional al curbei de contur a liniei materiale. Dacă curba de contur este un segment de dreaptă, acestea sunt integrale Riemann simple.

**Observația 3.1** Relația (3.27) nu se aplică pentru fire materiale flexibile care se deformează sub acțiunea greutății proprii.

În continuare se prezintă centrele de greutate ale unor corpuri solide omogene de forme geometrice particulare ([12], [17], [23]). Rezultatele sunt prezentate fără demonstrație, fiind obținute prin aplicarea formulelor de calcul (3.23), (3.25) și (3.27).

### III.2.1. Centrele de greutate ale corpurilor unidimensionale de forme particulare

Un corp material solid este unidimensional dacă două dintre dimensiunile sale sunt neglijabile în raport cu a treia, anume lungimea. Un corp solid unidimensional se prezintă prin modelul mecanic de bară materială, dacă opune rezistență la schimbarea formei sau fir material, dacă rezistența opusă la schimbarea formei este neglijabilă.

Barele materiale pot fi plane sau spațiale. Cel mai simplu model de bară materială este bara rectilinie (dreaptă). În cursul de față se prezintă numai centrele de greutate ale barelor plane omogene.

Firele materiale pot fi de greutate neglijabilă, utilizate pentru legarea corpurilor materiale solide ale unui sistem mecanic, sau pot fi de greutate măsurabilă, caz în care poziția de echilibru static a firului este dată de ecuația lăntișorului ([13], [17]). În cursul de față se prezintă problema de echilibru static a firului material omogen de greutate dată.

### III.2.1.1. Centrele de greutate ale barelor materiale omogene

Se prezintă două cazuri de bare plane omogene și cazul barei compuse.

Centrul de greutate al unei bare drepte se află la jumătatea sa. Dacă bara, notată  $AB$ , se raportează la un reper  $OXYZ$ , coordonatele centrului de greutate se obțin ca medie aritmetică a coordonatelor extremităților:

$$x_C = \frac{1}{2}(x_A + x_B), \quad y_C = \frac{1}{2}(y_A + y_B), \quad z_C = \frac{1}{2}(z_A + z_B). \quad (3.28)$$

Centrul de greutate al unei bare în formă de arc de cerc de rază  $R$  și unghi la centru  $2\alpha$  se află pe axa de simetrie, la distanța ([12], [22])

$$d = R \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha} \quad (3.29)$$

față de centrul geometric (centrul conturului circular), cu unghiul  $\alpha$  exprimat în radiani.

Pentru bara în formă de semicerc și bara în formă de sfert de cerc relația (3.29) se particularizează în formele (Fig. III.2 a și b):

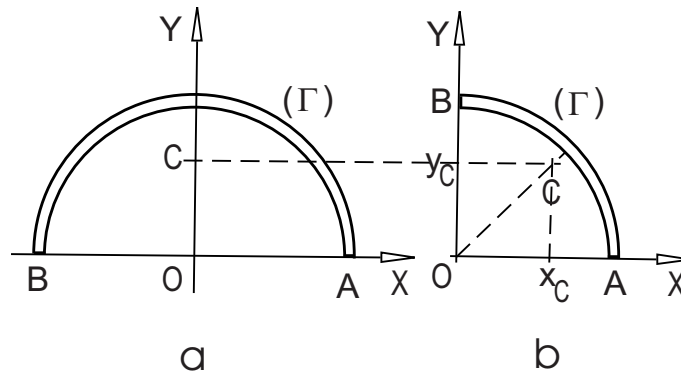


Figura III.2. Centrele de greutate ale barelor circulare

$$x_C = 0, \quad y_C = OC = \frac{2R}{\pi}, \quad (3.30)$$

respectiv

$$OC = \frac{2R}{\pi} \sqrt{2}, \quad x_C = y_C = \frac{2R}{\pi}. \quad (3.31)$$

Pentru o bară materială omogenă  $(\Gamma)$  compusă din  $n$  porțiuni plane sau spațiale raportată la un reper  $OXYZ$ , pentru care se cunosc pozițiile centrelor de greutate ale porțiunilor  $C_\mu$ ,  $\mu = \overline{1, n}$ , vectorul de poziție al centrului de greutate este dat de relația

$$\bar{r}_C = \frac{\sum_{\mu=1}^n \ell_\mu \cdot \bar{r}_{C_\mu}}{\sum_{\mu=1}^n \ell_\mu} = \frac{1}{L} \sum_{\mu=1}^n \ell_\mu \cdot \bar{r}_{C_\mu}, \quad (3.32)$$

unde  $\ell_\mu$  și  $\bar{r}_{C_\mu}$ ,  $\mu = \overline{1, n}$ , sunt lungimile barelor componente, respectiv vectorii de poziție ai centrelor de greutate, iar  $L$  este lungimea totală a barei.

Coordonatele centrului de greutate al barei ( $\Gamma$ ) se obțin prin proiectarea relației (3.32) pe axele de coordonate:

$$x_C = \frac{1}{L} \sum_1^n \ell_\mu \cdot x_{C_\mu}, \quad y_C = \frac{1}{L} \sum_1^n \ell_\mu \cdot y_{C_\mu}, \quad z_C = \frac{1}{L} \sum_1^n \ell_\mu \cdot z_{C_\mu}, \quad (3.33)$$

unde  $(x_{C_\mu}, y_{C_\mu}, z_{C_\mu})$  sunt coordonatele centrelor  $C_\mu$ ,  $\mu = \overline{1, n}$ .

### III.2.1.2. Echilibrul firului material omogen suspendat la extremități

Una din problemele mecanicii clasice care se încadrează în capitolul centrelor de greutate este problema de echilibru static a unui fir material omogen suspendat la extremități sub acțiunea greutății proprii.

Pentru studiul echilibrului firului material omogen se folosesc funcțiile hiperbolice sinus și cosinus din analiza matematică: sinus hiperbolic și cosinus hiperbolic. Acestea sunt definite pentru  $x \in \mathbb{R}$  prin relațiile ([16], [23]):

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}), \quad \operatorname{ch} x = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) \quad (3.34)$$

și au următoarele proprietăți:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} x &= -\operatorname{sh}(-x), \quad \operatorname{ch} x = \operatorname{ch}(-x), \\ \frac{d}{dx} (\operatorname{sh} x) &= (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \quad \frac{d}{dx} (\operatorname{ch} x) = (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \\ (\operatorname{ch} x)^2 - (\operatorname{sh} x)^2 &= 1, \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Se consideră un fir material omogen de lungime dată cu extremitățile notate  $A$  și  $B$ . Firul este flexibil, adică nu opune rezistență la schimbarea formei și inextensibil, adică nu-și modifică lungimea sub acțiunea forței de tensiune internă sau externă (nu se întinde).

Dacă extremitățile  $A$  și  $B$  ale firului se fixează la o distanță orizontală mai mică decât lungimea firului, se pune problema de a determina forma geometrică a firului, adică curba de contur, în condițiile în care asupra acestuia acționează numai greutatea proprie.

Se notează:

- $M$  – masa firului  $\langle Kg \rangle$ ,
- $L$  – lungimea firului  $\langle m \rangle$ ,
- $\rho$  – densitatea liniară a firului  $\langle Kg/m \rangle$ ,
- $(\Gamma)$  – curba de contur a firului suspendat,
- $ds$  – elementul de arc al curbei de contur,
- $dm$  – elementul de masă al firului (masa elementară).

Masa firului, densitatea și lungimea sunt legate prin relația

$$M = \rho \cdot L \quad \langle Kg \rangle. \quad (3.36)$$

Masa elementară, densitatea și lungimea elementară (elementul de arc) sunt legate prin relația (3.26):

$$dm = \rho \cdot ds, \quad (3.37)$$

firul fiind un model mecanic din categoria liniilor materiale.

Ca ipoteză se consideră cunoscute lungimea firului, densitatea liniară

$$L \langle m \rangle, \quad \rho \langle Kg/m \rangle$$

și pozițiile punctelor de suspensie  $A$  și  $B$ .

Se determină ecuația curbei de contur a firului

$$(\Gamma) : y = y(x), \quad (3.38)$$

într-un reper ales în anumite condiții, curbă conținută în planul vertical al punctelor  $A$  și  $B$ .

În orice punct al firului suspendat este prezentă o forță de tensiune internă, minimă în punctul cel mai de jos (vârful curbei de contur) și maximă în punctul cel mai de sus ( $A$  sau  $B$ ).

Într-un punct oarecare  $P$  al firului suspendat, forțele interne care acționează asupra elementului de lungime sunt (Fig. III.3):

$$\begin{aligned} d\vec{G} & - \text{greutatea elementară, pe direcție verticală,} \\ \bar{T} & - \text{tensiunea internă în jos, tangentă la curba } (\Gamma), \\ \bar{T} + d\bar{T} & - \text{tensiunea internă în sus, tangentă la curba } (\Gamma), \end{aligned}$$

unde s-a notat  $d\bar{T}$  variația infinit mică a tensiunii interne, orientată în sens crescător.

Se raportează planul curbei  $(\Gamma)$  la un reper ortogonal  $OXY$  cu axa  $OY$  în poziție verticală, astfel încât originea să coincidă cu punctul cel mai de jos al curbei, notat  $V$ .

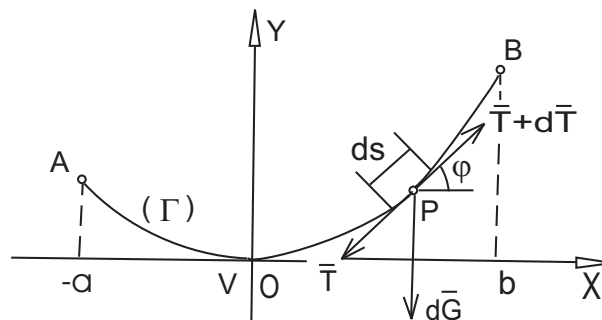


Figura III.3. Echilibrul firului omogen suspendat

În această ipoteză, lungimea curentă a arcului de curbă  $\widehat{OP}$  este dată de integrala ([1], [23], [25]):

$$s(x) = \left| \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx \right|, \quad y' = \frac{dy}{dx}, \quad (3.39)$$

unde  $y'$  este derivata în raport cu  $x$  a funcției (3.38).

Greutatea elementară se scrie ca produs dintre masa elementară și accelerația gravitațională:

$$d\bar{G} = \bar{g} \cdot dm,$$

sau încă, conform (3.37):

$$d\bar{G} = -\rho \cdot g \cdot ds \cdot \bar{j}. \quad (3.40)$$

Se notează  $T_x, T_y$  componentele tensiunii interne pe axele  $OX$ , respectiv  $OY$ . Avem:

$$d\bar{T} = dT_x \cdot \bar{i} + dT_y \cdot \bar{j}. \quad (3.41)$$

Se scrie condiția de echilibru static a elementului de lungime al firului ([13], [30]):

$$d\bar{G} + d\bar{T} = \bar{0},$$

ecuație care se proiectează pe axele  $OX$  și  $OY$ , obținând conform (3.40) și (3.41):

$$dT_x = 0 \quad \text{și} \quad dT_y = \rho \cdot g \cdot ds, \quad (3.42)$$

ecuații diferențiale scalare.

Integrând ecuațiile (3.42), rezultă

$$|T_x| = T_0 = \text{const.} \quad \text{și} \quad |T_y| = \rho \cdot g \cdot s, \quad (3.43)$$

unde  $s$  este lungimea curentă a arcului de curbă dată de (3.39).

**Observația 3.2** Tensiunea  $T_x$  este pozitivă sau negativă, în funcție de segmentul de fir secționat pe care acționează,  $\widehat{PA}$  sau  $\widehat{PB}$ . Tensiunea  $T_y$  este negativă.

Deoarece tensiunea internă este tangentă la curba de contur, avem

$$\frac{T_y}{T_x} = \text{tg } \varphi = \frac{dy}{dx}, \quad (3.44)$$

unde  $\varphi$  este unghiul tangentei la curba  $(\Gamma)$ .

Din (3.43) și (3.44) rezultă

$$\left| \frac{dy}{dx} \right| = \frac{\rho \cdot g}{T_0} \cdot s, \quad (3.45)$$

sau încă, înlocuind conform (3.39):

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{p} \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx, \quad (3.46)$$

unde s-a notat raportul constant pozitiv

$$p = \frac{T_0}{\rho \cdot g}, \quad \langle p \rangle = m. \quad (3.47)$$

Derivând ecuația (3.46) în raport cu  $x$ , avem

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{1}{p} \sqrt{1 + y'^2},$$

de unde se obține prin separarea variabilelor

$$\frac{dy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{dx}{p}. \quad (3.48)$$

Integrând ecuația (3.48), rezultă

$$\ln \left( y' + \sqrt{1 + y'^2} \right) = \frac{x}{p}, \quad (3.49)$$

constanta de integrare fiind nulă în condiția în care tangenta în origine la curba ( $\Gamma$ ) este orizontală,  $y'(0) = 0$ .

**Observația 3.3** În ecuația (3.49), abscisa  $x$  este negativă sau pozitivă, în funcție de poziția punctului  $P$  (Fig. III.3).

Ecuația (3.49) se scrie sub forma

$$y' + \sqrt{1 + y'^2} = \exp \left( \frac{x}{p} \right)$$

și se dezvoltă în continuare obținând

$$\frac{dy}{dx} = y' = \operatorname{sh} \left( \frac{x}{p} \right). \quad (3.50)$$

Deoarece funcția sinus hiperbolic este impară și funcția  $y'(x)$  este negativă pentru  $x < 0$  și pozitivă pentru  $x > 0$ , adică panta tangentei la curba ( $\Gamma$ ) este negativă în cadranul doi și pozitivă în cadranul unu, ecuația (3.50) se scrie:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{sh} \left( \frac{x}{p} \right). \quad (3.51)$$

Se notează  $a$  și  $b$  abscisele punctelor de suspensie  $A$  și  $B$  în reperul considerat, cunoscute prin ipoteză,  $a, b > 0$ .

Integrând ecuația (3.51) în condițiile

$$y(x) > 0, \quad x \in [-a, b], \quad x \neq 0 \text{ și } y(0) = 0 \quad (3.52)$$

se obține ecuația curbei de contur a firului

$$(\Gamma) : y = p \cdot \left[ \operatorname{ch} \left( \frac{x}{p} \right) - 1 \right], \quad x \in [-a, b]. \quad (3.53)$$

Ecuația (3.53) se numește *ecuația lăntișorului* ([13], [20], [22]) și a fost obținută prima dată în secolul al XVII-lea (aproximativ 1690) de către Gottfried Wilhelm von Leibniz

(1646–1716, german), Christiaan Huygens (1629–1695, olandez) și Johann Bernoulli (1667–1748, elvețian).

Constanta  $p$ , notată în (3,47), se numește *parametrul lăntișorului* și se determină din condiția de lungime a firului în funcție de pozițiile punctelor de suspensie  $A$  și  $B$ . Se pune condiția ca lungimea firului și abscisele punctelor  $A$  și  $B$ , cunoscute prin ipoteză, să verifice relația (3.39):

$$L = \int_{-a}^b \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx, \quad y' = \frac{dy}{dx}. \quad (3.54)$$

Din (3.51) și (3.54) rezultă

$$L = \int_{-a}^b \sqrt{1 + \left[ \operatorname{sh} \left( \frac{x}{p} \right) \right]^2} \cdot dx = \int_{-a}^b \operatorname{ch} \left( \frac{x}{p} \right) \cdot dx,$$

de unde se obține parametrul lăntișorului ca soluție a ecuației transcendente

$$\frac{L}{p} = \operatorname{sh} \left( \frac{a}{p} \right) + \operatorname{sh} \left( \frac{b}{p} \right), \quad (3.55)$$

ecuație care admite două soluții egale în modul și de semne contrare.

Tensiunea internă în secțiunea curentă  $P$  a firului se obține ca funcție de abscisă după cum urmează.

Tensiunea orizontală rezultă din (3.43) și (3.47):

$$|T_x| = \rho \cdot g \cdot p. \quad (3.56)$$

Tensiunea verticală rezultă din (3.44), (3.51) și (3.56):

$$|T_y| = \rho \cdot g \cdot p \cdot \left| \operatorname{sh} \left( \frac{x}{p} \right) \right|. \quad (3.57)$$

Tensiunea totală este

$$T = \sqrt{T_x^2 + T_y^2} = \rho \cdot g \cdot p \cdot \operatorname{ch} \left( \frac{x}{p} \right). \quad (3.58)$$

Conform (3.53) și (3.58) tensiunea internă se obține ca funcție de ordonată:

$$T = \rho \cdot g(p + y). \quad (3.59)$$

În continuare se prezintă două cazuri particulare de suspensie a firului material omogen.

### III.2.1.3. Echilibrul firului material omogen suspendat la nivel

Dacă punctele  $A$  și  $B$  în care se fixează extremitățile firului sunt la aceeași înălțime, axa  $OY$  este axă de simetrie pentru curba de contur ( $\Gamma$ ). Se notează  $\ell$  distanța orizontală dintre punctele  $A$  și  $B$ , distanță mai mică decât lungimea firului și avem:

$$a = b = \frac{\ell}{2}, \quad \ell < L. \quad (3.60)$$

Conform (3.55) și (3.60), parametrul lăntișorului este dat ca soluție (pozitivă) a ecuației transcendente:

$$\frac{L}{p} = 2 \cdot \operatorname{sh} \left( \frac{\ell}{2p} \right). \quad (3.61)$$

Săgeata firului, definită ca diferență dintre înălțimea punctelor de suspensie și înălțimea vârfului (punctul cel mai de jos) este conform (3.53):

$$f = y \left( -\frac{\ell}{2} \right) = y \left( \frac{\ell}{2} \right) = p \cdot \left[ \operatorname{ch} \left( \frac{\ell}{2p} \right) - 1 \right]. \quad (3.62)$$

Din (3.61) și (3.62) se obține

$$\operatorname{sh} \left( \frac{\ell}{2p} \right) = \frac{L}{2p} \quad \text{și} \quad \operatorname{ch} \left( \frac{\ell}{2p} \right) = \frac{f}{p} + 1. \quad (3.63)$$

Conform (3.35) și (3.63) avem

$$\left( \frac{f}{p} + 1 \right)^2 - \left( \frac{L}{2p} \right)^2 = 1,$$

de unde rezultă după efectuarea calculelor

$$p = \frac{L^2 - 4f^2}{8f}, \quad (3.64)$$

relație care permite calcularea parametrului lăntișorului prin măsurarea săgeții.

Tensiunea maximă în fir se obține în punctele de suspensie  $A$  și  $B$  pentru  $x = \mp \ell/2$  și  $y = f$ . Conform (3.58) și (3.59) avem:

$$T_{\max} = \rho \cdot g \cdot p \cdot \operatorname{ch} \left( \frac{\ell}{2p} \right), \quad (3.65)$$

respectiv

$$T_{\max} = \rho \cdot g(p + f). \quad (3.66)$$

### III.2.1.4. Echilibrul firului material omogen întins la nivel

Dacă punctele  $A$  și  $B$  în care se fixează extremitățile firului sunt la aceeași înălțime și distanța dintre acestea este aproape egală cu lungimea firului, axa  $OY$  este axă de



simetrie pentru curba de contur ( $\Gamma$ ) și firul este aproape întins în poziție orizontală. Se notează  $\ell$  distanța dintre punctele  $A$  și  $B$ . Avem:

$$a = b = \frac{\ell}{2}, \quad \ell \approx L. \quad (3.67)$$

În acest caz, curba de contur a firului se aproximează cu un segment de parabolă cu vârful în origine:

$$(\Gamma) : y = C \cdot x^2, \quad x \in \left[-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}\right], \quad (3.68)$$

în care constanta pozitivă  $C$  se determină din condițiile de suspensie,  $\langle C \rangle = m^{-1}$ .

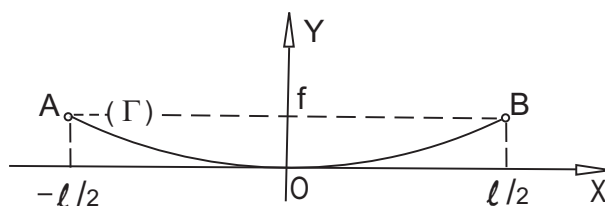


Figura III.4. Echilibrul firului omogen întins orizontal

Avem

$$y\left(-\frac{\ell}{2}\right) = y\left(\frac{\ell}{2}\right) = f \quad (3.69)$$

și, conform (3.68), rezultă

$$C = 4f/\ell^2, \quad (3.70)$$

relație care permite calcularea constantei curbei de contur prin măsurarea săgeții.

Înlocuind (3.70) în (3.68), avem

$$(\Gamma) : y = \frac{4f}{\ell^2} \cdot x^2, \quad x \in \left[-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}\right]. \quad (3.71)$$

Prin derivarea funcției (3.68), se obține

$$\frac{dy}{dx} = y' = 2C \cdot x. \quad (3.72)$$

Conform (3.43), (3.44) și (3.72), rezultă tensiunea verticală

$$|T_y| = 2C \cdot T_0 \cdot |x|. \quad (3.73)$$

Deoarece tensiunile verticale din punctele  $A$  și  $B$  de abscise  $x = \mp\ell/2$  echilibrează greutatea firului, avem în conformitate cu (3.36) și (3.73):

$$2C \cdot T_0 \cdot \ell = M \cdot g = \rho \cdot L \cdot g,$$

de unde rezultă în ipoteza (3.67):

$$2C \cdot T_0 = \rho \cdot g. \quad (3.74)$$

Înlocuind (3.70) în (3.74), se obține

$$T_0 = \frac{\rho \cdot g \cdot \ell^2}{8f}. \quad (3.75)$$

Tensiunea internă în secțiunea curentă  $P$  a firului se obține ca funcție de abscisă și săgeată după cum urmează.

Tensiunea orizontală rezultă din (3.43) și (3.75):

$$|T_x| = \frac{\rho \cdot g \cdot \ell^2}{8f}. \quad (3.76)$$

Tensiunea verticală rezultă din (3.73) și (3.74):

$$|T_y| = \rho \cdot g \cdot |x|. \quad (3.77)$$

Tensiunea totală este

$$T = \sqrt{T_x^2 + T_y^2} = \rho \cdot g \cdot \ell \sqrt{\frac{\ell^2}{64f^2} + \frac{x^2}{\ell^2}}. \quad (3.78)$$

Conform (3.71) și (3.78), tensiunea internă se obține ca funcție de ordonată:

$$T = \rho \cdot g \cdot \frac{\ell}{2} \sqrt{\frac{\ell^2}{16f^2} + \frac{y}{f}}. \quad (3.79)$$

Tensiunea maximă în fir se obține în punctele de suspensie  $A$  și  $B$ , pentru  $x = \mp \ell/2$  și  $y = f$ . Conform (3.78) și (3.79), avem:

$$T_{\max} = \rho \cdot g \cdot \frac{\ell}{2} \sqrt{1 + \frac{\ell^2}{16f^2}}. \quad (3.80)$$

### III.2.2. Centrele de greutate ale corpurilor bidimensionale de forme particulare

Un corp material solid este bidimensional dacă una dintre dimensiunile sale, anume grosimea este neglijabilă în raport cu celelalte două. Un corp bidimensional se prezintă prin modelul mecanic de suprafață materială, dacă opune rezistență la schimbarea formei sau membrană materială, dacă rezistența opusă la schimbării formei este neglijabilă.

Suprafețele materiale pot fi plane sau spațiale. Cel mai simplu model de suprafață materială este suprafața pătrată (plană). În cursul de față se prezintă numai centrele de greutate ale suprafețelor plane omogene.

Se prezintă patru cazuri de suprafețe plane omogene și cazul suprafeței compuse.

O placă în formă de triunghi are centrul de greutate la intersecția medianelor. Mediana este linia dreaptă care unește un vârf cu mijlocul laturii opuse. În cazul triunghiului dreptunghic punctul de intersecție al medianelor se proiectează pe catete la o treime de bază (unghiul drept) și două treimi de vârf (unghiul ascuțit). Dacă placa, notată  $ABC$ , se raportează la un reper  $OXYZ$ , coordonatele centrului de greutate (notat  $G$ ) se obțin ca medie aritmetică a coordonatelor vârfurilor:

$$\begin{aligned}x_G &= \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C), \\y_G &= \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C), \\z_G &= \frac{1}{3}(z_A + z_B + z_C).\end{aligned}\tag{3.81}$$

O placă în formă de paralelogram sau de dreptunghi are centrul de greutate la intersecția diagonalelor. În cazul dreptunghiului, punctul de intersecție al diagonalelor se proiectează pe laturi la jumătățile acestora.

O placă în formă de poligon regulat are centrul de greutate în centrul geometric, adică în centrul cercului circumscris poligonului.

Centrul de greutate al unei plăci în formă de sector circular de rază  $R$  și unghi la centru  $2\alpha$  se află pe axa de simetrie, la distanța ([12], [22])

$$d = \frac{2}{3} R \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha}\tag{3.82}$$

față de centrul geometric (centrul cercului), cu unghiul  $\alpha$  exprimat în radiani.

Pentru placa în formă de semicerc și placa în formă de sfert de cerc relația (3.82) se particularizează în formele (Fig. III.5 a și b):

$$x_C = 0, \quad y_C = OC = \frac{4R}{3\pi},\tag{3.83}$$

respectiv

$$OC = \frac{4R}{3\pi} \sqrt{2}, \quad x_C = y_C = \frac{4R}{3\pi}.\tag{3.84}$$

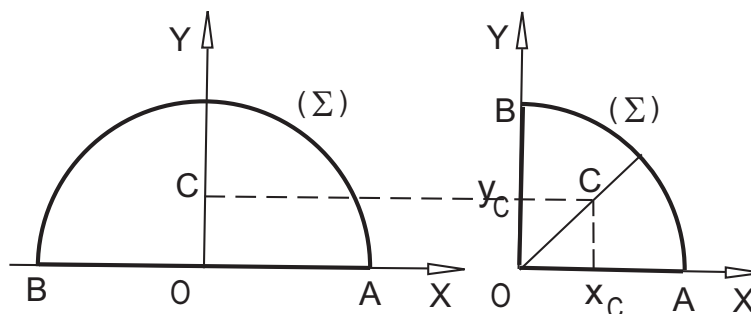


Figura III.5. Centrele de greutate ale plăcilor circulare

Pentru o placă materială omogenă ( $\Sigma$ ) compusă din  $n$  porțiuni plane sau spațiale raportată la un reper  $OXYZ$ , pentru care se cunosc pozițiile centrelor de greutate ale porțiunilor  $C_\mu$ ,  $\mu = \overline{1, n}$ , vectorul de poziție al centrului de greutate este dat de relația:

$$\bar{r}_C = \frac{\sum_{\mu=1}^n A_\mu \cdot \bar{r}_{C_\mu}}{\sum_{\mu=1}^n A_\mu} = \frac{1}{A} \sum_{\mu=1}^n A_\mu \cdot \bar{r}_{C_\mu}, \quad (3.85)$$

unde  $A_\mu$  și  $\bar{r}_{C_\mu}$ ,  $\mu = \overline{1, n}$ , sunt ariile plăcilor componente, respectiv vectorii de poziție ai centrelor de greutate, iar  $A$  este aria totală a plăcii.

Coordonatele centrului de greutate al plăcii ( $\Sigma$ ) se obțin prin proiectarea relației (3.85) pe axele de coordonate:

$$x_C = \frac{1}{A} \sum_1^n A_\mu x_{C_\mu}, \quad y_C = \frac{1}{A} \sum_1^n A_\mu y_{C_\mu}, \quad z_C = \frac{1}{A} \sum_1^n A_\mu z_{C_\mu}, \quad (3.86)$$

unde  $(x_{C_\mu}, y_{C_\mu}, z_{C_\mu})$  sunt coordonatele centrelor  $C_\mu$ ,  $\mu = \overline{1, n}$ .

### III.2.3. Centrele de greutate ale corpurilor tridimensionale de forme particulare

Un corp material solid este tridimensional dacă cele trei dimensiuni principale ale sale sunt de același ordin de mărime.

Un corp material tridimensional se prezintă prin modelul mecanic de solid rigid sau deformabil. Poziția centrului de greutate nu depinde de proprietățile de rigiditate sau deformabilitate.

Cel mai simplu model de corp tridimensional este cubul.

Se prezintă cinci cazuri de corpuri tridimensionale omogene și cazul corpului compus.

Centrul de greutate al unui corp pe volumul unei prisme (drepte sau înclinate) se află pe segmentul care unește centrele de greutate ale bazelor, la jumătatea acestuia.

Centrul de greutate al unui corp pe volumul unui paralelipiped se află la intersecția diagonalelor. În cazul paralelipipedului dreptunghic, punctul de intersecție al diagonalelor se proiectează pe laturi la jumătățile acestora.

Centrul de greutate al unui corp pe volumul unei piramide se află pe segmentul care unește vârful cu centrul de greutate al bazei, la un sfert distanță de bază și trei sferturi de vârf. În cazul piramidei drepte, centrul de greutate se află pe înălțime.

Centrul de greutate al unui corp pe volumul unui con se află pe segmentul care unește vârful cu centrul de greutate al bazei, la un sfert distanță de bază și trei sferturi de vârf ([12], [20], [21]). În cazul conului drept, centrul de greutate se află pe înălțime.

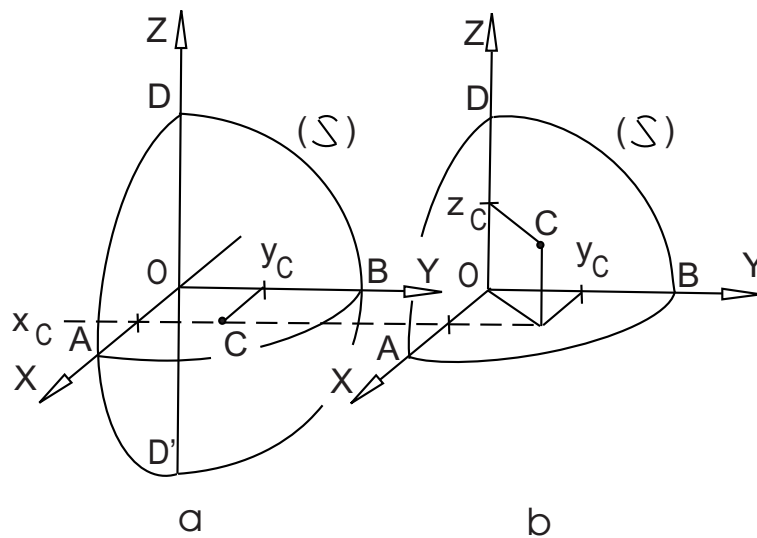


Figura III.6. Centrele de greutate ale volumelor sferice

Centrul de greutate al unui corp pe volumul unei semisfere se află pe axa de simetrie, la distanța de  $3/8$  din rază față de centrul geometric (centrul suprafeței sferice).

Acest rezultat, obținut prin calcul integral ([12], [20], [21]), implică două concluzii, după cum urmează.

Pentru un corp pe volumul unui sferă avem (Fig. III.6a):

$$x_C = y_C = \frac{3}{8} R, \quad z_C = 0. \quad (3.87)$$

Pentru un corp pe volumul unei optimi de sferă avem (Fig. III.6.b):

$$x_C = y_C = z_C = \frac{3}{8} R, \quad (3.88)$$

unde  $R$  este raza sferei.

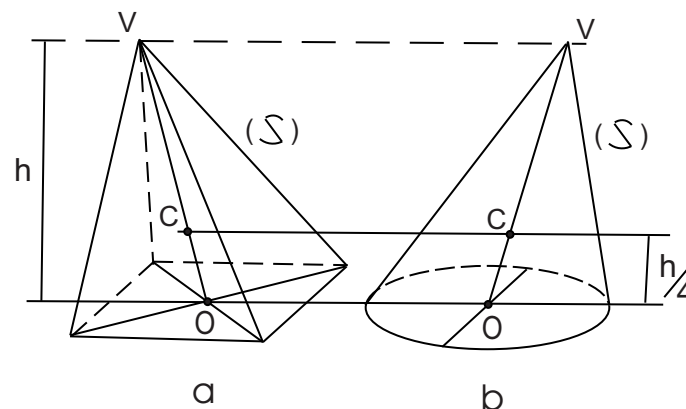


Figura III.7. Centrele de greutate ale volumelor conice

În cazul unui corp material omogen ( $S$ ) compus din  $n$  porțiuni tridimensionale raportat la un reper  $OXYZ$ , pentru care se cunosc pozițiile centrelor de greutate ale porțiunilor  $C_\mu$ ,  $\mu = \overline{1, n}$ , vectorul de poziție al centrului de greutate este dat de relația:

$$\bar{r}_C = \frac{\sum_{\mu=1}^n V_\mu \cdot \bar{r}_{C_\mu}}{\sum_{\mu=1}^n V_\mu} = \frac{1}{V} \sum_{\mu=1}^n V_\mu \cdot \bar{r}_{C_\mu}, \quad (3.89)$$

unde  $V_\mu$  și  $\bar{r}_{C_\mu}$ ,  $\mu = \overline{1, n}$ , sunt volumele corpurilor componente, respectiv vectorii de poziție ai centrelor de greutate, iar  $V$  este volumul total al corpului.

Coordonatele centrului de greutate al corpului ( $S$ ) se obțin prin proiectarea relației (3.89) pe axele de coordonate:

$$x_C = \frac{1}{V} \sum_1^n V_\mu x_{C_\mu}, \quad y_C = \frac{1}{V} \sum_1^n V_\mu y_{C_\mu}, \quad z_C = \frac{1}{V} \sum_1^n V_\mu z_{C_\mu}, \quad (3.90)$$

unde  $(x_{C_\mu}, y_{C_\mu}, z_{C_\mu})$  sunt coordonatele centrelor  $C_\mu$ ,  $\mu = \overline{1, n}$ .

## Capitolul IV

### STATICA

În cadrul mecanicii clasice, starea de echilibru a unui corp material poate fi definită din punct de vedere static sau dinamic, ambele fiind forme de echilibru mecanic. Alte forme de echilibru, care nu fac obiectul mecanicii clasice, sunt: echilibrul chimic, termic, electric etc. Starea de echilibru static a unui corp material este caracterizată prin absența mișcării mecanice, adică nu-și modifică poziția în timp. În opoziție cu mișcarea mecanică, starea de echilibru static este echivalentă cu starea de repaos. Starea de repaos, ca și starea de mișcare, poate fi absolută sau relativă, în funcție de reperul de referință.

Starea de echilibru static a unui corp material solid se obține prin aplicarea de legături, adică interacțiuni mecanice cu alte corpuri solide. În cazul unui corp material liber, fără legături aplicate, starea de echilibru static este un caz excepțional, fiind obținută în condiții speciale (exemple: sateliții geostaționari, un balon în atmosferă la înălțime fixă, un corp solid care pluteste pe apă etc.). Din acest motiv, în cursul de față se studiază echilibrul static al corpurilor materiale solide numai în condițiile legăturilor aplicate.

Din punct de vedere al modelelor mecanicii clasice (prezentate în *Introducere*), statica are două diviziuni: statica punctului material și statica corpului solid rigid, care se extinde și în cazul sistemelor de corpuri. Statica corpului solid deformabil se studiază în cadrul disciplinei de Rezistența Materialelor.

#### IV.1. Statica punctului material

Punctul material este modelul mecanic al unui corp de dimensiuni neglijabile (care pot fi neglijate în contextul problemei). Un punct material este definit prin masă  $\langle kg \rangle$ . Un punct material liber (fără legături) prezintă trei grade de libertate, adică are trei posibilități de mișcare în spațiu. Acestea sunt cele trei coordonate ale sale într-un reper triortogonal  $OXYZ$ .

##### IV.1.1. Legăturile punctului material

Starea de echilibru static a unui punct material se obține prin aplicarea de legături. Legăturile aplicate pot fi: legături prin fir, legături prin tijă (rigidă sau elastică), așezarea pe o linie materială sau așezarea pe o suprafață materială (care poate fi și suprafața unui corp solid).

Un punct material legat prin fir are două grade de libertate, considerând firul inextensibil (nu-și modifică lungimea prin întindere). În ipoteza în care firul rămâne întins, punctul material în mișcare ocupă poziții pe o suprafață sferică (pendul sferic).

Un punct material legat prin tijă rigidă are unul sau două grade de libertate, în funcție de condițiile de prindere ale tijei la celălalt capăt. Dacă tija este elastică (arc elicoidal), numărul gradelor de libertate crește (două, respectiv trei, în funcție de aceleași condiții).

Un punct material legat printr-o tijă de tip lamă elastică are un singur grad de libertate, în majoritatea cazurilor de studiu aceste tije fiind legate rigid la celălalt capăt.

Un punct material pe o linie materială are un singur grad de libertate, adică posibilitatea de mișcare în lungul curbei. Dacă legătura se poate desface, se numește unilaterală. În caz contrar, dacă legătura nu se poate desface, se numește bilaterală.

Un punct material pe o suprafață materială are două grade de libertate.

### IV.1.2. Reacțiunile legăturilor. Legea frecării. Axioma legăturilor

Acțiunea legăturilor asupra punctului material se exprimă prin forțe de legătură (reacțiuni).

În cazul legăturii prin fir inextensibil sau prin tijă rigidă, forța de legătură este o tensiune pe direcția firului material spre punctul de prindere al firului sau al tijei întinse, respectiv de la punctul de prindere spre punctul material în cazul tijei comprimate.

În cazul legăturii punctului material prin tijă elastică, forța de legătură este o forță elastică, în general proporțională cu deformația.

În cazul rezemării punctului material pe o linie sau pe o suprafață materială forța de legătură este de direcție necunoscută și se descompune pe două componente, tangențială și normală:

$$\bar{L} = \bar{T} + \bar{N}. \quad (4.1)$$

Pentru un punct material așezat pe o linie materială forța de legătură tangențială are direcția tangentei la curbă în punctul respectiv, iar forța de legătură normală are direcția normalei principale la curbă (Fig. IV.1a), cu condiția ca acestea să fie definite.

Pentru un punct material așezat pe o suprafață materială forța de legătură tangențială este conținută în planul tangent la suprafață în punctul respectiv, iar forța de legătură normală are direcția normalei la suprafață (Fig. IV.1.b) cu condiția ca acestea să fie definite.

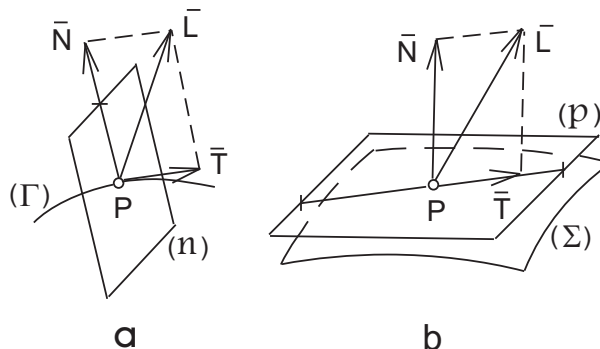


Figura IV.1. Punct material rezemat: a) pe o linie; b) pe o suprafață.



În Figura IV.1, notațiile reprezintă:

- ( $\Gamma$ ) – linie materială;
- ( $n$ ) – plan normal la curba ( $\Gamma$ );
- ( $\Sigma$ ) – suprafață materială;
- ( $p$ ) – plan tangent la suprafața ( $\Sigma$ ).

În continuare, forțele de legătură se vor numi *reacțiuni*.

*Reacțiunea tangențială*, care se mai numește și *forță de frecare*, are sens contrar tendinței de mișcare a punctului material pe curbă, respectiv pe suprafață.

În cazul legăturii unilaterale, reacțiunea normală are sensul spre desfacerea legăturii (punctul material "sare" de pe linia materială). La fel și în cazul rezemării pe o suprafață materială.

Între reacțiunea normală și reacțiunea tangențială există următoarea relație (legea frecării de alunecare):

$$|\overline{T}| \leq \mu |\overline{N}|, \quad (4.2)$$

cu egalitate la limita de echilibru static și în cazul mișcării, unde  $\mu$  este coeficientul de frecare la alunecare, mărime adimensională cu valori între 0 și 1.

**Observația 4.1** Coeficientul de frecare la alunecare este o caracteristică mecanică a corpurilor solide aflate în contact. Se determină experimental pentru diferite materiale.

În cazul unei legături ideale (fără frecare), reacțiunea tangențială este nulă.

**Axioma 4.1** (axioma legăturilor) *În cazul unui punct material cu legături aplicate, acțiunea acestora poate fi înlocuită prin forțele de legătură, considerând astfel punctul material liber.*

### IV.1.3. Condiția de echilibru static a punctului material

Se consideră un punct material  $P$  cu legături aplicate asupra căruia acționează un sistem de forțe

$$S = \{\overline{F}_1, \overline{F}_2, \dots, \overline{F}_n\}, \quad (4.3)$$

active și pasive, care include și forțele de legătură.

Forțele active sunt forțele care acționează pentru punerea punctului material în mișcare, adică pentru desfacerea echilibrului static. În opoziție cu forțele active, forțele pasive se opun mișcării. Forțele legăturilor aplicate se încadrează în categoria forțelor pasive. Reciproc, nu toate forțele pasive sunt forțe de legătură. Ca exemplu se dau forțele de rezistență ale mediului în cazul mișcării unui corp solid prin aer sau prin apă.

În conformitate cu Observația 2.11 (paragraful II.7), condiția de echilibru static a punctului material este ca rezultanta forțelor care acționează asupra sa să fie nulă:

$$\overline{R} = \overline{0}, \quad (4.4)$$

la care se adaugă condiția inițială de repaos.

Prin *rezultantă* se înțelege suma vectorială a forțelor active și pasive care acționează asupra punctului material:

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n. \quad (4.5)$$

Dacă punctul material se raportează la un reper triortogonal  $OXYZ$ , ecuația (4.4) se proiectează pe axe, obținând trei ecuații scalare:

$$R_X = 0, \quad R_Y = 0, \quad R_Z = 0. \quad (4.6)$$

Conform (4.5) și (4.6), rezultă

$$\sum_{\mu=1}^n F_{\mu X} = 0, \quad \sum_{\mu=1}^n F_{\mu Y} = 0, \quad \sum_{\mu=1}^n F_{\mu Z} = 0, \quad (4.7)$$

unde  $n$  este numărul forțelor, active și pasive, care acționează asupra punctului material.

Ecuațiile (4.7) constituie sistemul ecuațiilor scalare de echilibru static, având ca necunoscute reacțiunile legăturilor. În cazul legăturii cu frecare, la aceste ecuații se adaugă și legea de frecare (relația (4.2)).

Dacă sistemul de forțe  $S$  care acționează asupra punctului material  $P$  este un sistem de forțe coplanare, raportat la planul  $OXY$ , sistemul ecuațiilor scalare are două ecuații:

$$\sum_{\mu=1}^n F_{\mu X} = 0, \quad \sum_{\mu=1}^n F_{\mu Y} = 0. \quad (4.8)$$

Rezolvarea unei probleme de statică a punctului material constă în determinarea reacțiunilor legăturilor când se cunosc forțele active aplicate, adică în rezolvarea sistemului de ecuații scalare de echilibru static. Problema este static determinată dacă numărul de necunoscute este egal cu numărul de ecuații și sistemul admite soluție unică.

## IV.2. Statica solidului rigid

Corpul solid rigid este un model mecanic de dimensiuni măsurabile cu o formă geometrică precizată. Un corp material solid este definit din punct de vedere mecanic prin masă  $\langle kg \rangle$ , geometrie și dimensiuni. Alte caracteristici luate în considerare în cadrul mecanicii clasice sunt coeficienții de frecare în cazul interacțiunii mecanice dintre corpuri solide, coeficienții de rezistență a mediului în cazul mișcării prin aer sau prin apă etc. Pentru corpurile elastice (arcuri, resoarte) se iau în considerare caracteristicile de elasticitate și de amortizare.

Un corp solid (rigid) prezintă șase grade de libertate raportat la un reper triortogonal  $OXYZ$ , adică are șase posibilități de mișcare în spațiu. Acestea sunt cele trei translații pe axele  $OX, OY, OZ$  și cele trei rotații în jurul acestor axe.

### IV.2.1. Legăturile corpului solid

Starea de echilibru static a unui corp material solid este obținută prin aplicarea de legături. Legăturile aplicate pot fi: legături prin fir, legături prin tijă (rigidă sau elastică), așezarea (rezemarea) pe una sau mai multe linii materiale, așezarea (rezemarea) pe una sau mai multe suprafețe materiale (care poate fi și suprafața altui corp solid).

La aceste legături, aplicate și în cazul punctului material, se adaugă legăturile prin cuple cinematice și posibilitatea de imobilizare rigidă (încastrarea).

Un corp solid legat prin fir are cinci grade de libertate, considerând firul inextensibil (nu-și modifică lungimea prin întindere). Singura mișcare înlăturată este translația în lungul firului întins.

Un corp solid legat prin tijă rigidă are un număr de grade de libertate care depinde de condițiile de prindere ale tijeii de corp și la celălalt capăt. Numărul maxim de grade de libertate este cinci, în condițiile în care tija poate ocupa orice poziție relativă în raport cu corpul și în raport cu punctul de prindere (ca în cazul legăturii prin fir). Dacă tija este elastică (arc elicoidal), se adaugă în plus un grad de libertate.

Un corp solid legat printr-o tijă de tip lamă elastică are un număr de grade de libertate care depinde de condițiile de prindere ale tijeii de corp. Numărul maxim de grade de libertate este patru, în condițiile în care corpul poate ocupa orice poziție relativă în raport cu tija, în majoritatea cazurilor de studiu aceste tije fiind legate rigid la celălalt capăt.

Cazul rezeării unui corp solid pe o linie materială curbă este echivalent cu rezearea pe o suprafață materială care conține curba respectivă.

Un corp solid rezeat pe o suprafață materială are un număr de grade de libertate care depinde de formele geometrice ale corpului și suprafeței de reazem. Numărul minim de grade de libertate este zero în cazul imobilizării rigide și numărul maxim este cinci în cazul unei sfere pe o suprafață plană (cel mai simplu exemplu). Astfel, un corp paralelipiped dreptunghic pe un plan are trei grade de libertate, iar un corp cilindric cu generatoarea pe un plan are patru grade de libertate.

#### IV.2.2. Reacțiunile legăturilor. Legile de frecare

Acțiunea legăturilor asupra corpului solid rigid se exprimă prin forțe de legătură (reacțiuni).

În cazul legăturii prin fir și prin tijă rigidă sau elastică sunt valabile aceleași considerații ca în cazul punctului material (paragraful IV.1.2).

Cazul rezeării corpului solid pe una sau mai multe linii materiale este echivalent cu rezearea pe una sau mai multe suprafețe care conțin curbele respective și în continuare se studiază acest caz.

În cazul rezeării corpului solid pe o suprafață materială, contactul se realizează după o suprafață, după o curbă (sau mai multe) sau după un punct (sau mai multe). Numărul curbelor (punctelor) de contact depinde de formele geometrice ale corpului și suprafeței de reazem. În cursul de față se ia în considerare numai contactul după o singură curbă sau un singur punct. Formele geometrice ale corpului și suprafeței de reazem impun și numărul gradelor de libertate. Forțele de legătură sunt de direcții necunoscute.

În cazul contactului după o suprafață se consideră că în fiecare punct al acesteia se poate defini planul tangent comun și normala comună la suprafața corpului și la suprafața de reazem, care include suprafața de contact. Forțele de legătură sunt constituite dintr-o distribuție de forțe tangențiale conținute în planele tangente comune și o distribuție de forțe normale după direcțiile perpendiculare comune la suprafața

corpului și la suprafața de reazem în fiecare punct al suprafeței de contact. Sensul forțelor tangetțiale este contrar tendinței de alunecare relativă dintre suprafața corpului și suprafața de reazem. Sensul forțelor normale este spre desfacerea legăturii (corpul se desprinde de pe suprafață).

**Observația 4.2** Dacă suprafața de contact este plană, distribuțiile de forțe tangențiale și normale sunt distribuții de forțe paralele, distribuția tangențială fiind plană.

În cazul contactului după o curbă, se consideră că în fiecare punct al acesteia se poate defini planul tangent comun și normala comună la suprafața corpului și la suprafața de reazem, care include curba de contact. Forțele de legătură sunt constituite dintr-o distribuție de forțe tangențiale conținute în planele tangente comune și o distribuție de forțe normale după direcțiile perpendiculare comune la suprafața corpului și la suprafața de reazem în fiecare punct al curbei de contact. Sensul forțelor tangențiale este contrar tendinței de alunecare relativă dintre suprafața corpului și suprafața de reazem. Sensul forțelor normale este spre desfacerea legăturii (corpul se desprinde de pe suprafață).

**Observația 4.3** Dacă curba de contact este un segment de dreaptă, distribuțiile de forțe tangențiale și normale sunt distribuții de forțe paralele coplanare.

Deoarece în majoritatea problemelor de studiu contactul fizic dintre un corp solid rigid și o suprafață materială se poate reduce la un singur punct (contact teoretic), se dezvoltă în continuare cazul contactului punctiform.

Se consideră un corp solid ( $W$ ) așezat (rezemat) pe o suprafață materială ( $\Sigma$ ) având un singur punct comun. Se admite că suprafața corpului și suprafața de reazem au un plan tangent comun și o normală comună în punctul teoretic de contact, notat  $C$ . Sistemul forțelor de legătură se reduce în punctul  $C$  la un tursor propriu-zis în cazul cel mai general. Componentele acestui tursor sunt forța de legătură rezultantă  $\bar{L}$  și momentul rezultant al forțelor de legătură în raport cu punctul  $C$ ,  $\bar{\mathcal{M}}_C$ , ambele de direcții necunoscute. Componentele tursorului forțelor de legătură se descompun pe două direcții, tangetțială și normală:

$$\begin{aligned}\bar{L} &= \bar{T} + \bar{N}, \\ \bar{\mathcal{M}}_C &= \bar{\mathcal{M}}_{Cr} + \bar{\mathcal{M}}_{Cp},\end{aligned}\tag{4.9}$$

unde  $\bar{T}$  este componenta tangetțială și  $\bar{N}$  componenta normală a forței rezultante de legătură,  $\bar{\mathcal{M}}_{Cr}$  este componenta tangetțială și  $\bar{\mathcal{M}}_{Cp}$  componenta normală a momentului rezultant de legătură.

Forța de legătură tangetțială  $\bar{T}$  și componenta tangetțială a momentului rezultant  $\bar{\mathcal{M}}_{Cr}$  sunt conținute în planul tangent comun la suprafața corpului și la suprafața de reazem în punctul  $C$ , iar forța de legătură normală  $\bar{N}$  și componenta normală a momentului rezultant  $\bar{\mathcal{M}}_{Cp}$  au direcția normalei comune la suprafața corpului și la suprafața de reazem în punctul  $C$  (Fig. IV.2).

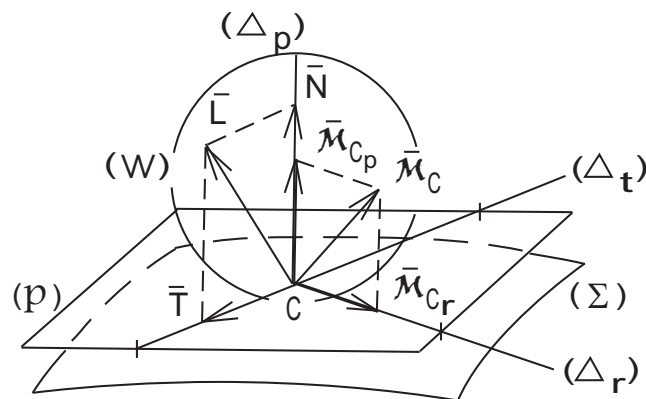


Figura IV.2. Corp solid rezemat pe o suprafață

În Figura IV.2 s-a notat  $(p)$  planul tangent comun la suprafața corpului și suprafața de reazem în punctul  $C$ .

În continuare, forțele de legătură se vor numi reacțiuni.

Reacțiunea tangențială  $\bar{T}$ , care se mai numește și *forță de frecare la alunecare*, are sens contrar tendinței de mișcare de translație a corpului  $(W)$  pe suprafața  $(\Sigma)$  după o direcție conținută în planul tangent comun  $(p)$ . Reacțiunea normală  $\bar{N}$  are sensul spre desfacerea legăturii (corpul se desprinde de pe suprafață).

Între reacțiunea normală și reacțiunea tangențială există aceeași relație ca în cazul punctului material (legea frecării de alunecare):

$$|\bar{T}| \leq \mu |\bar{N}|, \quad (4.10)$$

cu egalitate în cazul mișcării de alunecare, unde  $\mu$  este coeficientul de frecare la alunecare, mărime adimensională cu valori între 0 și 1.

**Observația 4.4** Coeficientul de frecare la alunecare este o caracteristică mecanică a corpurilor solide aflate în contact. Se determină experimental pentru diferite materiale și depinde de gradul de prelucrare al suprafețelor. În cazul contactului după o suprafață se acceptă ipoteza că nu depinde de mărimea suprafeței de contact.

În cazul unei legături ideale (fără frecare de alunecare), reacțiunea tangențială este nulă.

În Figura IV.2 s-a notat  $(\Delta_t)$  axa mișcării de translație.

Componenta tangențială a momentului rezultat  $\bar{M}_{Cr}$ , care se mai numește și *moment de frecare la rostogolire*, are sens contrar tendinței de rotație a corpului  $(W)$  pe suprafața  $(\Sigma)$  în jurul unei axe conținută în planul tangent comun care trece prin punctul  $C$ . Mișcarea de rostogolire implică schimbarea poziției punctului de contact  $C$  pe suprafața corpului  $(W)$ . Poziția punctului de contact  $C$  pe suprafața de reazem  $(\Sigma)$  se modifică în cazul rostogolirii fără alunecare, poate rămâne fixă în anumite condiții în cazul mișcării de patinare.

Între reacțiunea normală și momentul de frecare la rostogolire există următoarea relație (legea frecării de rostogolire):

$$|\overline{\mathcal{M}}_{C_r}| \leq s|\overline{N}|, \quad (4.11)$$

cu egalitate în cazul mișcării de rostogolire, unde  $s$  este coeficientul de frecare la rostogolire, mărime fizică care se măsoară în unități de lungime ( $m$ ).

**Observația 4.5** Coeficientul de frecare la rostogolire este o caracteristică de formă geometrică și de rigiditate a corpurilor solide aflate în contact. Se determină experimental.

În cazul rezemării unui corp solid pe o suprafață materială solidă mișcarea de rostogolire este permisă în cazul contactului pe un punct (contact punctiform), pe un segment de dreaptă sau pe un segment de curbă, dacă sunt satisfăcute anumite condiții geometrice, adică suprafața corpului rezemat și suprafața de reazem sunt suprafețe generate prin rotația liniei de contact. În toate aceste cazuri coeficientul de frecare la rostogolire se determină experimental în ipoteza în care corpurile solide (corpul rezemat și suprafața de reazem) nu sunt perfect rigide și contactul se realizează pe o suprafață de mici dimensiuni în cazul contactului punctiform, respectiv pe o suprafață cu o dimensiune mică în cazul contactului liniar (contact în condiții reale). Cazul contactului pe o suprafață de dimensiuni măsurabile elimină posibilitatea de rostogolire.

În cazul contactului strict punctiform momentul de frecare la rostogolire este nul.

În Figura IV.2 s-a notat ( $\Delta_r$ ) axa mișcării de rostogolire.

Componenta normală a momentului rezultat  $\overline{\mathcal{M}}_{C_p}$ , care se mai numește și *moment de frecare la pivotare*, are sens contrar tendinței de rotație a corpului ( $W$ ) pe suprafața ( $\Sigma$ ) în jurul normalei comune în punctul de contact  $C$ . Mișcarea de pivotare nu implică schimbarea poziției punctului de contact  $C$  pe suprafața corpului ( $W$ ). Poziția punctului de contact  $C$  pe suprafața de reazem ( $\Sigma$ ) nu se modifică, decât în cazul în care există și mișcare de translație (alunecare).

Între reacțiunea normală și momentul de frecare la pivotare există următoarea relație (legea frecării de pivotare):

$$|\overline{\mathcal{M}}_{C_p}| \leq \nu|\overline{N}|, \quad (4.12)$$

cu egalitate în cazul mișcării de pivotare, unde  $\nu$  este coeficientul de frecare la pivotare, mărime fizică care se măsoară în unități de lungime ( $m$ ).

**Observația 4.6** Coeficientul de frecare la pivotare este o caracteristică mecanică a corpurilor solide aflate în contact. Se determină experimental și depinde de gradul de prelucrare al suprafețelor și de dimensiunea contactului dintre acestea.

În cazul rezemării unui corp solid pe o suprafață materială solidă mișcarea de pivotare este permisă în cazul contactului pe un punct (contact punctiform), pe o suprafață plană sau de rotație, pe un segment de dreaptă sau pe un segment de curbă plană, dacă suprafața de reazem este plană.

În cazul contactului punctiform, coeficientul de frecare la pivotare se determină experimental în ipoteza în care corpurile solide (corpul rezemat și suprafața de reazem)

nu sunt perfect rigide și contactul se realizează pe o suprafață de mici dimensiuni (contact în condiții reale). În cazul contactului după o suprafață, un segment de dreaptă sau un segment de curbă plană de dimensiuni măsurabile, coeficientul de frecare la pivotare depinde de lungimea suprafeței, respectiv de lungimea segmentului de dreaptă sau de curbă.

În cazul contactului strict punctiform, momentul de frecare la pivotare este nul.

În Figura IV.2 s-a notat ( $\Delta_p$ ) axa mișcării de pivotare.

**Observația 4.7** Relațiile (4.10), (4.11) și (4.12) se mai numesc și *legile frecării uscate*, fiind stabilite experimental în condițiile absenței stratului de lubrifiant lichid între suprafețe. Sunt cunoscute ca *legile lui Coulomb*, după numele fizicianului francez Charles Augustin de Coulomb (1736-1806).

### IV.2.3. Cuple cinematice

În afară de legăturile prezentate în paragraful IV.2.1, comune pentru modelele mecanice de punct material și de corp solid (rigid), în cazul corpurilor solide rigide o altă categorie de legături aplicabile constituie legăturile prin cuple cinematice. Acestea sunt legături între corpurile solide care permit un anumit tip de mișcare relativă între acestea. O cuplă cinematică între două corpuri solide rigide presupune ca acestea să aibă două suprafețe active de aceeași formă geometrică și de aceeași dimensiuni în contact (suprafețe conjugate sau complementare).

Există trei tipuri principale de cuple cinematice, având suprafețele active conjugate după cum urmează:

- *cupla de translație rectilinie*, două suprafețe plane multiple sau două suprafețe cilindrice, una interioară și cealaltă exterioară, cu posibilitate de translație relativă (după generatoare în cazul suprafețelor cilindrice);
- *cupla de rotație plană (rotație simplă)*, două suprafețe cilindrice circulare sau două suprafețe de revoluție, una interioară și cealaltă exterioară, cu posibilitate de rotație relativă în jurul axei comune;
- *cupla de rotație spațială (rotație compusă)*, două suprafețe sferice, una interioară și cealaltă exterioară, cu posibilitate de rotație relativă în jurul centrului comun.

**Observația 4.8** O suprafață de revoluție este o suprafață generată de o curbă plană care se rotește în jurul unei axe conținută în planul său. Cele mai simple suprafețe de revoluție sunt suprafața cilindrică circulară și suprafața conică circulară.

La cele trei tipuri principale de cuple cinematice prezentate se adaugă cuplele cinematice compuse, de exemplu cupla elicoidală (șurub-piuliță) care combină o mișcare de rotație plană cu o mișcare de translație pe aceeași axă.

Ca tip de legătură, cuplele cinematice se încadrează în categoria mai generală a rezemării unui corp pe o suprafață.

**Observația 4.9** Cupla de rotație plană cu suprafețe cilindrice circulare poate fi și cuplă de translație, adică poate constitui o cuplă compusă, de rototranslație.

**Observația 4.10** Cupla de rotație plană cu suprafețe cilindrice circulare apare sub denumirea de *articulație cilindrică* în problemele de statică, respectiv *lagăr cilindric* în problemele de cinematică și dinamică. Dacă cele două suprafețe active au o bază plană comună (circulară sau coroană circulară), cupla cinematică constituie un lagăr pivot (lagăr cilindric pivot).

**Observația 4.11** Cupla de rotație plană cu suprafețe de revoluție altele decât cele cilindrice circulare apare sub denumirea de *lagăr pivot* în problemele de dinamică. Cele mai uzuale suprafețe de revoluție pentru lagărul pivot sunt suprafețele conice circulare (lagăr conic pivot). Într-un lagăr pivot, cele două suprafețe active pot avea și o bază plană comună (circulară sau coroană circulară).

**Observația 4.12** Cupla de rotație spațială apare sub denumirea de *articulație sferică* în problemele de statică. Este mai rar întâlnită în problemele de cinematică și dinamică. Din punct de vedere tehnic nu este necesar ca suprafețele sferice să fie complete.

#### IV.2.4. Reazeme. Reacțiunile din reazeme. Axioma legăturilor

Legăturile aplicate modelului mecanic de corp solid (rigid) se pot clasifica și din punct de vedere al gradelor de libertate. Un reazem este o legătură aplicată unui corp solid care înlătură una sau mai multe posibilități de mișcare, în scopul obținerii stării de echilibru static. Spre deosebire de cuplele cinematice prezentate în paragraful IV.2.3, reazemele sunt legături aplicate pentru imobilizarea corpurilor, având funcții statice.

În majoritatea problemelor de mecanică, sistemele de forțe care acționează asupra corpurilor sunt sisteme de forțe coplanare sau sisteme coplanare a căror acțiune este ulterior însumată conform principiului suprapunerii efectelor. Din acest motiv, în cursul de față se studiază statica corpului solid numai în opoziție cu posibilitatea de mișcare plană.

Se consideră un corp solid ( $W$ ) raportat la un reper triortogonal  $OXYZ$  și se notează ( $\Sigma$ ) intersecția corpului cu planul  $OXY$ . Secțiunea ( $\Sigma$ ) prezintă trei grade de libertate în planul  $OXY$ , adică are trei posibilități de mișcare. Acestea sunt cele două translații pe axele  $OX$  și  $OY$  și rotația în jurul axei  $OZ$ . Pentru imobilizarea plan-paralelă a corpului ( $W$ ), adică pentru înlăturarea posibilităților de mișcare ale secțiunii ( $\Sigma$ ) în planul  $OXY$ , se aplică legături prin reazeme, în afara legăturilor menționate în paragraful IV.2.1.

Un *reazem* este o legătură care elimină unul sau mai multe grade de libertate.

Pentru imobilizarea plan-paralelă a secțiunii ( $\Sigma$ ) a corpului ( $W$ ) în planul  $OXY$  se pot aplica reazeme simple, duble sau triple.

Reazemul simplu elimină un grad de libertate, translația pe axa  $OX$ , pe axa  $OY$  sau pe o axă oarecare din planul  $OXY$  și permite translația pe o direcție perpendiculară din planul  $OXY$  și rotația în jurul unei axe normale la acest plan (Fig. IV.3.a).



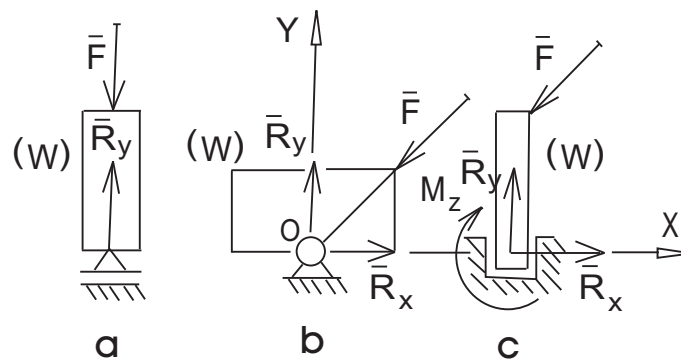
Reazemul dublu elimină două grade de libertate, translațiile pe axele  $OX$  și  $OY$  și permite rotația în jurul unei axe normale pe planul  $OXY$  (Fig. IV.3.b).

Reazemul triplu elimină cele trei grade de libertate ale secțiunii ( $\Sigma$ ) în planul  $OXY$ , realizând imobilizarea rigidă a corpului ( $W$ ) (Fig. IV.3.c).

Ca tip de legătură, reazemele se încadrează în categoria mai generală a rezemării unui corp pe o suprafață.

**Observația 4.13** Reazemul dublu este echivalent cu articulația cilindrică. Reazemul triplu se mai numește și *încastrare*.

Acțiunea reazemelor asupra corpurilor se exprimă prin forțe de legătură, numite în continuare *reacțiuni*.



a) reazem simplu   b) reazem dublu   c) reazem triplu

Figura IV.3. Legătura prin reazem

Reacțiunile dezvoltate în reazeme sunt eforturi (forțe și momente) pe direcțiile gradelelor de libertate eliminate. Sensul reacțiunilor este contrar tendințelor de mișcare ale corpului sub acțiunea forțelor active aplicate. Dacă gradul de libertate înlăturat este o translație reacțiunea este o forță, dacă este o rotație reacțiunea este un moment, adică un cuplu de forțe.

În Figura IV.3, notațiile reprezintă:

$$\begin{aligned} \bar{F} & - \text{forța activă aplicată secțiunii } (\Sigma); \\ \bar{R}_X, \bar{R}_Y & - \text{forțele de reacțiune pe axele } OX, OY; \\ \bar{M}_Z & - \text{momentul de reacțiune pe axa } OZ. \end{aligned}$$

Reacțiunile în reazemul simplu se reduc la o forță pe direcția axei  $OY$ ,  $\bar{R} = \bar{R}_Y$ .

Reacțiunile în reazemul dublu se reduc la o forță cu două componente pe axele  $OX$  și  $OY$ :

$$\bar{R} = \bar{R}_X + \bar{R}_Y, \quad |\bar{R}| = \sqrt{R_X^2 + R_Y^2}. \quad (4.13)$$

Reacțiunile în reazemul triplu se reduc la un torsesor, adică o forță cu două componente pe axele  $OX$  și  $OY$  și un moment (cuplu de forțe) pe axa  $OZ$ :

$$\bar{R} = \bar{R}_X + \bar{R}_Y, \quad |\bar{R}| = \sqrt{R_X^2 + R_Y^2}, \quad \bar{M}_Z = M_Z \cdot \bar{k}. \quad (4.14)$$

În cazul corpului solid rigid legat prin articulație cilindrică (lagăr cilindric, IV.2.3), legătura poate dezvolta și un moment de frecare la alunecare pe direcția axei articulației ( $OZ$ ), în sens contrar tendinței de rotație:

$$|\overline{M}_f| \leq \mu r |\overline{R}|, \quad \overline{M}_f = M_f \cdot \overline{k}, \quad (4.15)$$

cu egalitate în cazul mișcării de rotație plană, unde  $\mu$  este coeficientul de frecare la alunecare definit în (4.10),  $r$  este raza articulației cilindrice, iar  $|\overline{R}|$  este forța de reacțiune definită în (4.13).

În cazul unui corp solid rigid legat prin lagăr pivot (IV.2.3), forța de reacțiune are trei componente pe direcțiile axelor de coordonate ( $OX$ ,  $OY$  și  $OZ$  – axa lagărului):

$$\overline{R} = \overline{R}_X + \overline{R}_Y + \overline{R}_Z, \quad |\overline{R}| = \sqrt{R_X^2 + R_Y^2 + R_Z^2}. \quad (4.16)$$

Legătura prin lagăr pivot poate dezvolta și un moment de frecare la alunecare pe direcția axei lagărului ( $OZ$ ), în sens contrar tendinței de rotație. Relația de definiție este aceeași ca în cazul lagărului cilindric (relația (4.15)), cu precizarea că  $r$  reprezintă raza medie a suprafețelor conice și forța de reacțiune este dată de (4.13).

Din punct de vedere al gradelor de libertate, cupla de rotație spațială (articulația sferică) prezentată în IV.2.3 apare ca un reazem care elimină posibilitățile de translație în spațiu. În cazul unui corp solid rigid raportat la un reper triortogonal  $OXYZ$ , legătura prin articulație sferică înlătură trei grade de libertate: translațiile pe axele  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  și permite rotațiile în jurul acestor axe. Astfel, reacțiunea dezvoltată într-o articulație sferică este o forță cu trei componente pe axele  $OX$ ,  $OY$  și  $OZ$ , definită la fel ca în cazul lagărului pivot:

$$\overline{R} = \overline{R}_X + \overline{R}_Y + \overline{R}_Z, \quad |\overline{R}| = \sqrt{R_X^2 + R_Y^2 + R_Z^2}. \quad (4.17)$$

Legătura prin articulație sferică poate dezvolta și un moment de frecare la alunecare pe direcția axei instantanee de rotație, în sens contrar tendinței de rotație:

$$|\overline{M}_f| \leq \mu r |\overline{R}|, \quad (4.18)$$

cu egalitate în cazul mișcării de rotație, unde  $\mu$  este coeficientul de frecare la alunecare definit în (4.10),  $r$  este raza articulației sferice, iar  $|\overline{R}|$  este forța de reacțiune definită în (4.17).

**Observația 4.14** Dacă reperul de referință are axa  $OX$  orizontală și axa  $OY$  verticală, reacțiunile forțe pe axa  $OX$  se notează cu litera  $H$ , iar pe axa  $OY$  se notează cu litera  $V$ , notații uzuale în problemele de statică.

**Observația 4.15** Unitățile de măsură pentru momentele de frecare prezentate în IV.2.2 și IV.2.4 sunt unitatea de forță înmulțită cu unitatea de lungime ( $N \cdot m$ ).

**Axioma 4.2** (axioma legăturilor) *În cazul unui corp solid rigid cu legături aplicate, acțiunea acestora asupra corpului poate fi înlocuită prin forțele și momentele de legătură, considerând astfel corpul solid liber.*

**Observația 4.16** Legăturile aplicate sunt cele prezentate în IV.2.1, IV.2.3 și IV.2.4.

### IV.2.5. Condiția de echilibru static a corpului solid

Se consideră un corp solid rigid ( $W$ ) cu legături aplicate asupra căruia acționează un sistem compus din  $n$  forțe și un moment resultant:

$$\mathcal{F} = \{\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n, \bar{M}\}, \quad (4.19)$$

active și pasive, care include și reacțiunile legăturilor, conform axiomei legăturilor.

Se raportează corpul ( $W$ ) la un reper triortogonal  $OXYZ$ . Forțele active și pasive se definesc la fel ca în cazul punctului material (IV.1.3).

Studiul static al corpului solid rigid presupune determinarea reacțiunilor legăturilor în condițiile în care se cunosc forțele active aplicate.

În conformitate cu II.8 (cazurile de reducere), condiția de echilibru static a corpului solid ( $W$ ) este ca torsorul în raport cu polul  $O$  (originea reperului) al forțelor care acționează asupra sa să fie nul:

$$\bar{R} = \bar{0}, \quad \bar{\mathcal{M}}_O = \bar{0}, \quad (4.20)$$

la care se adaugă condiția inițială de repaos.

Rezultanta ( $\bar{R}$ ) este definită ca suma vectorială a forțelor active și pasive care acționează asupra corpului. Momentul resultant ( $\bar{\mathcal{M}}_O$ ) este definit ca suma vectorială a momentelor acestor forțe în raport cu polul  $O$  la care se adună momentele de legătură în cazul în care corpul are legături care implică astfel de reacțiuni (moment de încastrare, moment de frecare la rostogolire, moment de frecare la pivotare etc.).

Conform (4.19), componentele torsorului sunt:

$$\begin{aligned} \bar{R} &= \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n, \\ \bar{\mathcal{M}}_O &= \bar{M}_O(\bar{F}_1) + \bar{M}_O(\bar{F}_2) + \dots + \bar{M}_O(\bar{F}_n) + \bar{M}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

unde s-a notat  $\bar{M}$  suma resultantă a momentelor active și de legătură, definită cuplu de forțe independent de pol în relația (4.19).

Ecuatiile (4.20) se proiectează pe axe, obținând câte trei ecuații scalare:

$$\begin{aligned} R_X &= 0, & R_Y &= 0, & R_Z &= 0, \\ \mathcal{M}_{OX} &= 0, & \mathcal{M}_{OY} &= 0, & \mathcal{M}_{OZ} &= 0. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Conform (4.21) și (4.22), rezultă:

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=1}^n F_{\mu X} &= 0, & \sum_{\mu=1}^n F_{\mu Y} &= 0, & \sum_{\mu=1}^n F_{\mu Z} &= 0, \\ \sum_{\mu=1}^n M_{OX}(\bar{F}_\mu) + M_X &= 0, & \sum_{\mu=1}^n M_{OY}(\bar{F}_\mu) + M_Y &= 0, & \sum_{\mu=1}^n M_{OZ}(\bar{F}_\mu) + M_Z &= 0, \end{aligned} \quad (4.23)$$

unde  $n$  este numărul forțelor, active și pasive, care acționează asupra corpului ( $W$ ).

Ecuatiile (4.23) constituie sistemul ecuațiilor scalare de echilibru static. În cazul legăturilor cu frecare, la aceste ecuații se adaugă legile de frecare corespunzătoare (relațiile (4.10)–(4.12), (4.15), (4.18)).

Dacă sistemul de forțe  $\mathcal{F}$  definit în (4.19) este un sistem de forțe coplanare, corpul ( $W$ ) fiind immobilizat plan-paralel, acesta se raportează la un reper  $OXYZ$  astfel încât forțele sistemului să fie conținute în planul  $OXY$  și momentul  $\overline{M}$  pe axa  $OZ$ . În conformitate cu II.10.1 (sisteme de vectori coplanari), sistemul de forțe  $\mathcal{F}$  se reduce la un vector unic și condițiile de echilibru static (4.23) devin:

$$\sum_{\mu=1}^n F_{\mu X} = 0, \quad \sum_{\mu=1}^n F_{\mu Y} = 0, \quad \sum_{\mu=1}^n M_{OZ}(\overline{F}_{\mu}) + M_Z = 0, \quad (4.24)$$

Rezolvarea unei probleme de statică a corpului solid rigid constă în determinarea reacțiilor legăturilor când se cunosc forțele active aplicate, adică în rezolvarea sistemului de ecuații scalare de echilibru static. Problema este static determinată dacă numărul de necunoscute este egal cu numărul de ecuații. Dacă numărul de necunoscute este mai mare decât numărul de ecuații, problema se rezolvă în cadrul disciplinei de Rezistența Materialelor, considerând și deformațiile elastice ale corpului în ipoteza în care acesta nu este perfect rigid.

### IV.3. Statica sistemelor de corpuri

Se numește *sistem mecanic* un ansamblu de corpuri solide (rigide) aflate în interacțiune mecanică prin legăturile aplicate. Sistemul mecanic include modelele mecanice de punct material și de corp solid (rigid). Legăturile sistemelor mecanice sunt cele prezentate în cazul punctului material (IV.1.1) și corpului solid (IV.2.1, IV.2.3 și IV.2.4). În funcție de destinație, legăturile pot fi interioare, între corpurile sistemului și exterioare, între corpurile sistemului și elementul exterior (baza sistemului).

Starea de echilibru static a unui sistem mecanic de corpuri solide rigide este obținută ca urmare a legăturilor exterioare aplicate și a legăturilor interioare care înlătură posibilitățile de mișcare relativă între elementele sistemului. Un sistem mecanic fără legături exterioare este un sistem liber (nu se studiază în cadrul staticii).

Studiul static al sistemelor de corpuri solide presupune determinarea reacțiilor legăturilor interioare și exterioare în ipoteza acțiunii unui sistem de forțe active.

Se consideră un sistem mecanic compus din  $m$  corpuri solide rigide

$$\mathcal{S} = \{W_1, W_2, \dots, W_m\} \quad (4.25)$$

cu legături interioare și exterioare aplicate, acționat de un sistem compus din  $n$  forțe active și un moment resultant, definit cuplu de forțe independent de pol:

$$\mathcal{F} = \{\overline{F}_1, \overline{F}_2, \dots, \overline{F}_n, \overline{M}\}. \quad (4.26)$$

Se raportează sistemul  $\mathcal{S}$  la un reper triortogonal  $OXYZ$ . Condiția de echilibru static este aceeași ca în cazul corpului solid (rigid), tursorul în raport cu polul  $O$  (originea reperului) al forțelor active și pasive care acționează asupra sistemului de corpuri să fie nul:

$$\overline{R} = \overline{0}, \quad \overline{M}_O = \overline{0}, \quad (4.27)$$

la care se adaugă condiția inițială de repaos.

Rezultanta ( $\overline{R}$ ) este definită ca sumă vectorială a forțelor active ( $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \dots, \overline{F}_n$ ) și a forțelor *legăturilor exterioare* ale sistemului de corpuri. Momentul rezultat ( $\overline{\mathcal{M}}_O$ ) este definit ca suma vectorială a momentelor acestor forțe în raport cu polul  $O$  la care se adună momentul activ  $\overline{M}$  și momentele de legătură în cazul în care sistemul de corpuri are *legături exterioare* care implică astfel de reacțiuni (moment de încastrare, moment de frecare la rostogolire, moment de frecare la pivotare etc.).

Ecuatiile (4.27) se proiectează pe axe, obținând câte trei ecuații scalare:

$$\begin{aligned} R_X &= 0, & R_Y &= 0, & R_Z &= 0, \\ \mathcal{M}_{OX} &= 0, & \mathcal{M}_{OY} &= 0, & \mathcal{M}_{OZ} &= 0. \end{aligned} \quad (4.28)$$

În cazul *legăturilor exterioare* cu frecare, la aceste ecuații se adaugă și legile de frecare corespunzătoare (relațiile (4.10)–(4.12), (4.15), (4.18)).

Rezolvarea unei probleme de statică a sistemelor de corpuri constă în determinarea reacțiunilor legăturilor când se cunosc forțele active aplicate. Ecuatiile (4.28) permit determinarea reacțiunilor legăturilor exterioare numai în cazuri particulare, pentru sisteme static determinate exterior, la care numărul reacțiunilor legăturilor exterioare este egal cu numărul de ecuații scalare. Ecuatiile (4.28) nu implică reacțiunile legăturilor interioare.

Pentru rezolvarea completă a problemei, se aplică metoda separării corpurilor sau alte metode echivalente cu aceasta (metoda echilibrului părților, metoda secțiunilor) prezentate în literatura de specialitate ([17], [21], [22]).

În continuare, se prezintă modul de rezolvare a problemei prin metoda separării corpurilor, care implică desfacerea legăturilor interioare și exterioare ale sistemului de corpuri ([17], [21], [22]).

Se consideră separat fiecare corp ( $W_\mu$ ) al sistemului de corpuri raportat la un reper propriu  $O_\mu X_\mu Y_\mu Z_\mu$ ,  $\mu = \overline{1, m}$ . Conform axiomei legăturilor (axioma 4.2), legăturile aplicate corpului ( $W_\mu$ ), atât interioare cât și exterioare, se înlocuiesc prin reacțiunile corespunzătoare, forțe și momente în cazul legăturilor care implică momente de legătură.

Se scriu condițiile de echilibru static pentru fiecare corp al sistemului în reperele proprii considerate:

$$\overline{R}_\mu = \overline{0}, \quad \overline{\mathcal{M}}_{O_\mu} = \overline{0}, \quad \mu = \overline{1, m}, \quad (4.29)$$

la care se adaugă condițiile inițiale de repaos.

Rezultanta ( $\overline{R}_\mu$ ) este definită ca suma vectorială a forțelor active și a forțelor legăturilor interioare și exterioare ale corpului ( $W_\mu$ ),  $\mu = \overline{1, m}$ . Momentul rezultat ( $\overline{\mathcal{M}}_{O_\mu}$ ) este definit ca suma vectorială a momentelor acestor forțe în raport cu polul  $O_\mu$ , originea reperului propriu, la care se adună componenta momentului activ  $\overline{M}$  care acționează asupra corpului ( $W_\mu$ ) și momentele de legătură în cazul în care corpul ( $W_\mu$ ) are legături interioare și exterioare care implică astfel de reacțiuni (moment de încastrare, moment de frecare la rostogolire, moment de frecare la pivotare etc.),  $\mu = \overline{1, m}$ .

La desfacerea legăturilor interioare ale sistemului de corpuri se aplică principiul acțiunii și reacțiunii. Astfel, dacă corpul ( $W_\mu$ ) are o legătură cu corpul ( $W_\sigma$ ),  $\mu, \sigma = \overline{1, m}$ ,  $\mu \neq \sigma$ , forțele rezultante  $\overline{R}_\mu$  și  $\overline{R}_\sigma$  din ecuațiile (4.29) includ forțele de legătură

$\overline{F}_{\sigma\mu}$ , respectiv  $\overline{F}_{\mu\sigma}$  care satisfac relația:

$$\overline{F}_{\mu\sigma} = -\overline{F}_{\sigma\mu}. \quad (4.30)$$

Forța  $\overline{F}_{\sigma\mu}$  este forța cu care corpul ( $W_\sigma$ ) acționează asupra corpului ( $W_\mu$ ), iar forța  $\overline{F}_{\mu\sigma}$  este forța cu care corpul ( $W_\mu$ ) acționează asupra corpului ( $W_\sigma$ ) prin legătura interioară.

Dacă legătura dintre corpurile ( $W_\mu$ ) și ( $W_\sigma$ ) implică și un moment de legătură, momentele rezultante  $\overline{M}_{O_\mu}$  și  $\overline{M}_{O_\sigma}$  din ecuațiile (4.29) includ momentele de legătură  $\overline{M}_{\sigma\mu}$ , respectiv  $\overline{M}_{\mu\sigma}$ , care satisfac relația

$$\overline{M}_{\mu\sigma} = -\overline{M}_{\sigma\mu}, \quad (4.31)$$

definite cupluri de forțe independente de pol, cu aceeași explicație ca în cazul relației (4.30).

Ecuațiile (4.29) se proiectează pe axele reperelor proprii, obținând un număr de  $(6m)$  ecuații scalare,  $\mu = \overline{1, m}$ :

$$\begin{aligned} R_{\mu X} &= 0, & R_{\mu Y} &= 0, & R_{\mu Z} &= 0, \\ \mathcal{M}_{O_\mu X} &= 0, & \mathcal{M}_{O_\mu Y} &= 0, & \mathcal{M}_{O_\mu Z} &= 0. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Ecuațiile (4.32) constituie sistemul ecuațiilor scalare de echilibru static. În cazul legăturilor cu frecare, la aceste ecuații se adaugă și legile de frecare corespunzătoare (relațiile (4.10)–(4.12), (4.15), (4.18)).

Dacă sistemul de forțe active  $\mathcal{F}$  definit în (4.26) este un sistem de forțe coplanare, sistemul de corpuri  $\mathcal{S}$  fiind imobilizat plan-parallel, acesta se raportează la un reper  $OXYZ$  astfel încât forțele sistemului  $\mathcal{F}$  să fie conținute în planul  $OXY$  și momentul activ  $\overline{M}$  pe axa  $OZ$ . Corpurile ( $W_\mu$ ) ale sistemului  $\mathcal{S}$  se raportează la repere proprii  $O_\mu X_\mu Y_\mu Z_\mu$  astfel încât planele  $O_\mu X_\mu Y_\mu$  să coincidă cu planul  $OXY$  și axele  $O_\mu Z_\mu$  să fie paralele cu axa  $OZ$ :

$$O_\mu X_\mu Y_\mu \equiv OXY, \quad OZ_\mu \parallel OZ, \quad \mu = \overline{1, m}. \quad (4.33)$$

În conformitate cu II.10.1 (sisteme de vectori coplanari), sistemele de forțe care acționează asupra corpurilor ( $W_\mu$ ) se reduc la vectori unici și ecuațiile de echilibru static (4.32) devin:

$$R_{\mu X} = 0, \quad R_{\mu Y} = 0, \quad \mathcal{M}_{O_\mu Z} = 0, \quad \mu = \overline{1, m}, \quad (4.34)$$

constituind un sistem cu  $(3m)$  ecuații scalare.

Rezolvarea unei probleme de statică a sistemelor de corpuri constă în determinarea reacțiilor legăturilor interioare și exterioare când se cunosc forțele active aplicate, adică în rezolvarea sistemului de ecuații scalare de echilibru static. Problema este static determinată dacă numărul de necunoscute este egal cu numărul de ecuații, cu aceeași precizare ca în IV.2.5. Reacțiile legăturilor exterioare obținute prin rezolvarea sistemului de ecuații scalare (4.32) sau (4.34) trebuie să verifice și ecuațiile generale (4.28).

## Capitolul V

### CINEMATICA

Cinematica este capitolul mecanicii clasice care studiază mișcarea mecanică a corpurilor solide, adică deplasarea prin modificarea poziției ocupate în spațiu într-un anumit interval de timp. Studiul cinematic nu ia în considerare forțele care acționează asupra corpurilor, ci numai efectul acestor forțe, adică starea de mișcare mecanică a corpurilor.

Din punct de vedere al modelelor mecanicii clasice (prezentate în *Introducere*) cinematica are două diviziuni: cinematica punctului material și cinematica corpului solid (rigid). În raport cu noțiunile fundamentale de spațiu și timp ale mecanicii clasice, cinematica prezintă ca noțiuni de bază traiectoria, viteza și accelerația.

Traiectoria este definită ca mulțimea pozițiilor succesive ocupate în spațiu de un punct material sau de un punct care aparține unui corp solid în mișcare. Viteza și accelerația sunt mărimi fizice care dau informații calitative asupra mișcării. Viteza măsoară spațiul parcurs de un punct material sau de un punct care aparține unui corp solid într-un anumit interval de timp și indică direcția și sensul mișcării. Accelerația măsoară variația vitezei în timp. În cazul corpului solid (rigid) se introduc noțiunile de câmp de viteze și câmp de accelerații, corpul având o infinitate de puncte.

Studiul cinematic al punctului material și al corpului solid se raportează la un reper de referință în care se exprimă parametrii de poziție ai punctului material și ai corpului solid (coordonatele). Reperul de referință este un corp solid nedeformabil, în mod curent reperul triortogonal  $OXYZ$ . Dacă reperul este fix, mișcarea punctului material sau a corpului solid față de acesta se numește *mișcare absolută*. Dacă reperul de referință este în mișcare, mișcarea punctului material sau a corpului solid față de acesta se numește *mișcare relativă*.

Problemele cinematicii sunt de două tipuri:

- probleme directe, când se cunosc legile de variație în timp ale parametrilor de poziție (ale coordonatelor) și se determină traiectoriile, vitezele și accelerațiile;
- probleme inverse, când se cunosc accelerațiile și anumite condiții ale mișcării (condiții inițiale) și se determină legile de variație în timp ale parametrilor de poziție (legile de mișcare).

## V.1. Cinematica punctului material

Subiectul acestui subcapitol al cursului este modelul mecanic de punct material.

Cinematica punctului material studiază mișcarea mecanică a acestui model fizic, adică un corp de dimensiuni neglijabile, fără a lua în considerare masa și forțele care acționează asupra acestuia. Un punct material în mișcare are o singură traiectorie, iar la un moment dat are o anumită viteză și accelerație. Pentru studiul mișcării punctului material este necesar un reper. Mișcarea punctului material raportată la un reper fix se numește *absolută*, iar raportată la un reper mobil (un corp în mișcare) se numește *relativă*. Modelul mecanic de punct material prezintă trei grade de libertate în spațiu. Într-un reper triortogonal, acestea sunt cele trei coordonate carteziene ale sale.

Se consideră un punct material  $P$  raportat la un reper triortogonal  $OXYZ$  cu versorii axelor de coordonate notați  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ . Poziția punctului material în reperul  $OXYZ$  este dată de vectorul de poziție

$$\bar{r} = \overline{OP} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}, \quad (5.1)$$

unde  $x, y, z$  sunt coordonatele carteziene ale punctului  $P$ .

Starea de mișcare mecanică a punctului material este dată de modificarea poziției în timp, fiind exprimată prin funcțiile de variație în timp ale vectorului de poziție, respectiv ale coordonatelor în reperul considerat:

$$\bar{r} = \bar{r}(t) = x(t) \cdot \bar{i} + y(t) \cdot \bar{j} + z(t) \cdot \bar{k}, \quad t \in [t_0, t_3], \quad (5.2)$$

unde  $t_0$  reprezintă momentul inițial și  $t_3$  momentul final al mișcării.

Pentru a descrie din punct de vedere fizic mișcarea punctului material, funcțiile din relația (5.2) trebuie să fie continue, uniforme și cel puțin de două ori derivabile în raport cu variabila  $t$  (timpul) pe domeniul de definiție. Exprimarea analitică a acestor condiții este următoarea, în ordinea în care au fost numite:

- pentru orice  $t \in [t_0, t_3]$  este satisfăcută condiția

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{r}(t + \Delta t) = \bar{r}(t); \quad (5.3)$$

- pentru orice  $t \in [t_0, t_3]$  există un singur punct  $P$  care satisface condiția

$$\bar{r} = \overline{OP} = \bar{r}(t); \quad (5.4)$$

- pentru orice  $t \in [t_0, t_3]$  se definesc funcțiile derivate

$$\dot{\bar{r}} = \frac{d\bar{r}}{dt} \quad \text{și} \quad \ddot{\bar{r}} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}. \quad (5.5)$$

**Observația 5.1** Există cazuri în care funcția  $\dot{\bar{r}}$  poate fi nedefinită pentru anumite momente  $t$ , având limită dublă, de exemplu în cazul ciocnirilor (punctul material în mișcare lovește o suprafață solidă).



### V.1.1. Traectoria, viteza și accelerația

**Definiția 5.1** Se numește *traectorie* a punctului material în mișcare mulțimea de puncte compusă din pozițiile succesive ocupate în spațiu. Traectoria este o curbă continuă în spațiul geometric euclidian.

Relația (5.2) exprimă ecuația vectorială a traectoriei punctului  $P$  în reperul  $OXYZ$ , un segment de curbă notat  $(\Gamma)$  între punctele  $P_0$  (poziția inițială) și  $P_3$  (poziția finală):

$$(\Gamma) : \bar{r} = \bar{r}(t), \quad \bar{r}(t_0) = \overline{OP_0}, \quad \bar{r}(t_3) = \overline{OP_3}, \quad t \in [t_0, t_3]. \quad (5.6)$$

Legile de variație în timp ale coordonatelor carteziene constituie ecuațiile parametrice ale mișcării punctului  $P$ :

$$(\Gamma) : x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in [t_0, t_3]. \quad (5.7)$$

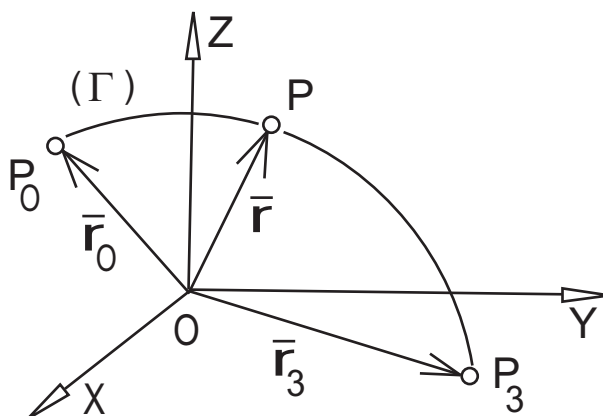


Figura V.1. Traectoria punctului material

Deoarece în problemele de cinematică nu întotdeauna se poate recunoaște traectoria după ecuațiile parametrice, se poate aplica (în limita posibilităților) eliminarea parametrului  $t$  din ecuațiile de mișcare (5.7), obținând traectoria ca o curbă sub formă implicită:

$$(\Gamma) : \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (5.8)$$

Ecuațiile (5.8) dau traectoria punctului material ca intersecție a două suprafețe geometrice  $(\Sigma_1)$  și  $(\Sigma_2)$  date prin ecuații implicite:

$$(\Sigma_1) : f(x, y, z) = 0, \quad (\Sigma_2) : g(x, y, z) = 0. \quad (5.9)$$

**Observația 5.2** Ecuațiile (5.8) sunt folosite pentru determinarea traectoriei în problemele de cinematică. Nu oferă informații calitative asupra mișcării.

Se notează  $P_1$  poziția punctului material la momentul  $t_1$  și  $P_2$  poziția la un moment ulterior  $t_2$ :

$$\bar{r}_1 = \bar{r}(t_1) = \overline{OP_1}, \quad \bar{r}_2 = \bar{r}(t_2) = \overline{OP_2}, \quad t_1 < t_2, \quad (5.10)$$

$t_1$  și  $t_2$  fiind momente de timp din intervalul de mișcare,  $t_1, t_2 \in [t_0, t_3]$ .

**Definiția 5.2** Se numește *viteză medie* a punctului material în mișcare pe intervalul de timp  $[t_1, t_2]$  mărimea fizică vectorială definită prin relația:

$$\bar{v}_m = \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{\bar{r}_2 - \bar{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\bar{r}(t_2) - \bar{r}(t_1)}{t_2 - t_1}. \quad (5.11)$$

Unitățile de măsură pentru viteză sunt unitatea de lungime raportată la unitatea de timp,  $\langle v_m \rangle = m/s$ .

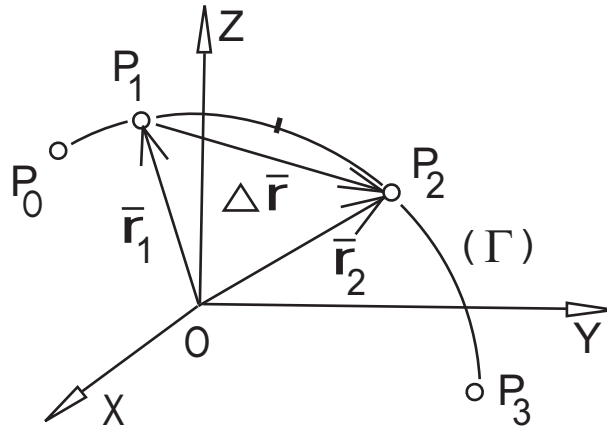


Figura V.2. Viteza medie

Viteza instantanee (viteza la un moment dat) se definește prin trecerea la limită în relația (5.11), considerând cele două momente de timp  $t_1$  și  $t_2$  infinit apropiate.

**Definiția 5.3** Se numește *viteză instantanee* a punctului material în mișcare la un moment dat  $t$  mărimea fizică vectorială definită prin relația:

$$\bar{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}(t)}{\Delta t}, \quad \bar{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{r}(t + \Delta t) - \bar{r}(t)}{\Delta t}, \quad t \in [t_0, t_3], \quad (5.12)$$

care este egală prin definiție cu derivata vectorului de poziție la momentul  $t$  ([1], [23]):

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{\bar{r}}, \quad (5.13)$$

unde prin punct s-a notat derivata de ordinul întâi.

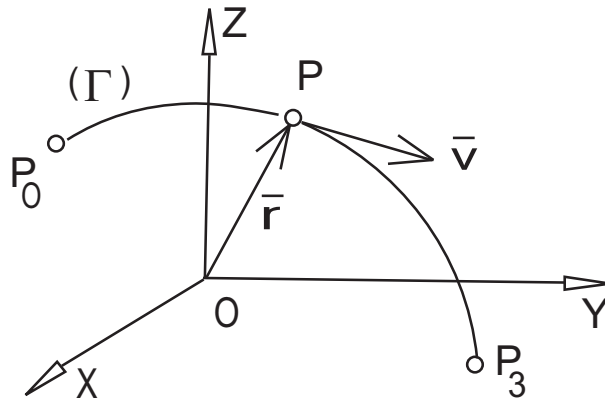


Figura V.3. Viteza instantanee

**Observația 5.3** Viteza instantanee este un vector tangent la traiectorie în poziția curentă, conform definiției derivatei.

**Definiția 5.4** Se numește *acelerație medie* a punctului material în mișcare pe intervalul de timp  $[t_1, t_2]$  mărimea fizică vectorială definită prin relația:

$$\bar{a}_m = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{\bar{v}_2 - \bar{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\bar{v}(t_2) - \bar{v}(t_1)}{t_2 - t_1}, \quad (5.14)$$

unde  $\bar{v}_1$  și  $\bar{v}_2$  sunt vitezele instantanee la momentele  $t_1$  și  $t_2$ , definite conform (5.12).

Unitățile de măsură pentru accelerație sunt unitatea de lungime raportată la unitatea de timp la pătrat,  $\langle a_m \rangle = m/s^2$ .

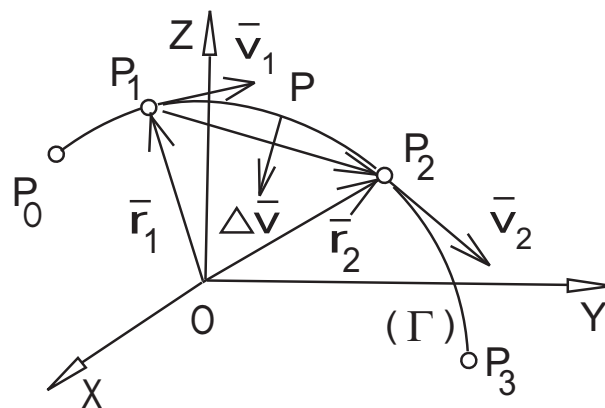


Figura V.4. Accelerația medie

Accelerația instantanee (accelerația la un moment dat) se definește prin trecerea la limită în relația (5.14), considerând cele două momente de timp  $t_1$  și  $t_2$  infinit apropiate.

**Definiția 5.5** Se numește *acelerație instantanee* a punctului material în mișcare la un moment dat  $t$  mărimea fizică vectorială definită prin relația:

$$\bar{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}(t)}{\Delta t}, \quad \bar{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{v}(t + \Delta t) - \bar{v}(t)}{\Delta t}, \quad t \in [t_0, t_3], \quad (5.15)$$

care este egală prin definiție cu derivata vectorului vitează instantanee la momentul  $t$  ([1], [23]):

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \dot{\bar{v}}. \quad (5.16)$$

Conform (5.13) și (5.16), accelerația instantanee este egală cu derivata de ordinul doi a vectorului de poziție:

$$\bar{a} = \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \ddot{\bar{r}}, \quad (5.17)$$

unde prin două puncte s-a notat derivata de ordinul doi.

**Observația 5.4** Accelerația instantanee este un vector cu direcția și sensul spre centrul de curbură al traiectoriei în poziția curentă.

În continuare, prin viteză și accelerație a punctului material în mișcare se va înțelege viteza și accelerația instantanee (la un moment dat).

### V.1.2. Traiectoria, viteza și accelerația în coordonate carteziene

Se consideră un punct material  $P$  raportat la un reper triortogonal  $OXYZ$  cu versorii axelor de coordonate notați  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ . Se cunosc legile de mișcare ale punctului material în coordonate carteziene, exprimate ca funcții de timp, care reprezintă ecuațiile parametrice ale traiectoriei:

$$(\Gamma) : x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in [t_0, t_1], \quad (5.18)$$

unde  $t_0$  este momentul inițial și  $t_1$  momentul final al mișcării.

Pentru a descrie din punct de vedere fizic mișcarea punctului material funcțiile parametrice (5.18) trebuie să fie continue, uniforme și cel puțin de două ori derivabile pe intervalul de definiție.

Dacă traiectoria nu este recunoscută din ecuațiile parametrice (5.18), se poate aplica eliminarea parametrului  $t$  din aceste ecuații, obținând curba traiectorie ca intersecție a două suprafețe geometrice date prin ecuații implicite:

$$(\Gamma) = (\Sigma_1) \cap (\Sigma_2), \quad \begin{cases} (\Sigma_1) : f(x, y, z) = 0 \\ (\Sigma_2) : g(x, y, z) = 0 \end{cases}. \quad (5.19)$$

Conform (5.13), viteza în coordonate carteziene este

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k}, \quad (5.20)$$

unde  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  sunt derivatele de ordinul întâi în raport cu timpul ale funcțiilor (5.18):

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt}, \quad \dot{z} = \frac{dz}{dt}, \quad (5.21)$$

funcții calculate la momentul curent  $t$ .

Conform (5.17), accelerația în coordonate carteziene este:

$$\bar{a} = \ddot{\bar{r}} = \ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j} + \ddot{z}\bar{k}, \quad (5.22)$$

unde  $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$  sunt derivatele de ordinul doi în raport cu timpul ale funcțiilor (5.18):

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2}, \quad (5.23)$$

funcții calculate la momentul curent  $t$ .

Conform (5.20) și (5.22), modulele vitezei și accelerației în coordonate carteziene sunt:

$$|\bar{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}, \quad |\bar{a}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} \quad (5.24)$$

și reprezintă valorile nominale ale vitezei și accelerației la momentul curent.

### V.1.3. Traiectoria, viteza și accelerația în coordonate cilindrice

Se consideră un punct material  $P$  raportat la un reper triortogonal  $OXYZ$  cu versorii axelor de coordonate notați  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ . Se notează  $P_0$  proiecția punctului  $P$  în planul  $OXY$ . Coordonatele cilindrice ale punctului  $P$  sunt (Figura V.5):

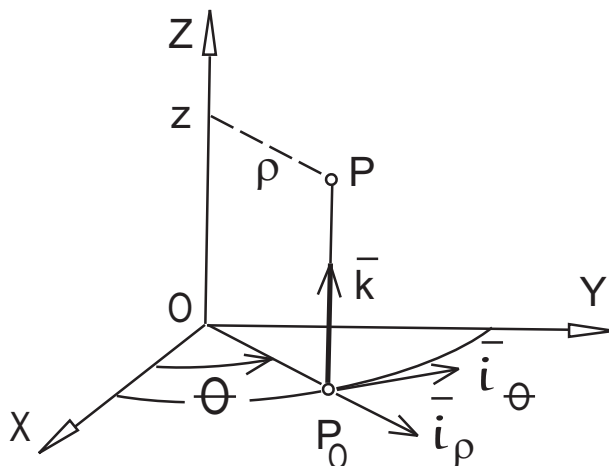


Figura V.5. Coordonatele cilindrice

- raza polară  $\rho$ , definită ca distanța de la origine la punctul  $P_0$ ;
- unghiul polar  $\theta$ , definit ca unghi între semiaxa  $OX$  pozitivă și raza polară, măsurat în sens direct trigonometric în planul  $OXY$ ;
- cota  $z$ , definită ca distanța orientată dintre punctele  $P_0$  și  $P$ , aceeași ca în coordonate carteziene.

Relațiile de definiție ale coordonatelor cilindrice sunt:

$$\rho = \text{dist}(O, P_0), \quad \theta = \sphericalangle(OX, OP_0), \quad z = \overline{P_0P} \cdot \bar{k}. \quad (5.25)$$

Domeniile de definiție ale coordonatelor cilindrice sunt:

$$\rho \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi), \quad z \in \mathbb{R}. \quad (5.26)$$

Relațiile de legătură între coordonatele cilindrice și coordonatele carteziene sunt:

$$x = \rho \cdot \cos \theta, \quad y = \rho \cdot \sin \theta, \quad z = z, \quad (5.27)$$

respectiv

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (5.28)$$

În coordonate cilindrice se definesc versorul razei polare și versorul unghiului polar. Versorul razei polare ( $\bar{i}_\rho$ ) are direcția  $OP_0$  și sensul de la  $O$  spre  $P_0$ . Versorul unghiului polar ( $\bar{i}_\theta$ ) este perpendicular pe planul  $OP_0P$  și paralel cu planul  $OXY$ , fiind orientat

în sensul creșterii unghiului polar. Triedrul  $(\bar{i}_\rho, \bar{i}_\theta, \bar{k})$  este drept orientat și are caracter intrinsec, având ca origine punctul  $P$  (sau  $P_0$ ).

Relațiile de legătură între versorii cilindrici și versorii cartezieni stabilite pe baza definiției produsului scalar, sunt ([18], [20], [22]):

$$\bar{i}_\rho = \bar{i} \cos \theta + \bar{j} \sin \theta, \quad \bar{i}_\theta = -\bar{i} \sin \theta + \bar{j} \cos \theta, \quad (5.29)$$

respectiv

$$\bar{i} = \bar{i}_\rho \cos \theta - \bar{i}_\theta \sin \theta, \quad \bar{j} = \bar{i}_\rho \sin \theta + \bar{i}_\theta \cos \theta, \quad (5.30)$$

al treilea versor fiind același în ambele repere.

Se cunosc legile de mișcare ale punctului material  $P$  în coordonate cilindrice, exprimate ca funcții de timp, care reprezintă ecuațiile parametrice ale traiectoriei:

$$(\Gamma) : \rho = \rho(t), \quad \theta = \theta(t), \quad z = z(t), \quad t \in [t_0, t_1], \quad (5.31)$$

unde  $t_0$  este momentul inițial și  $t_1$  momentul final al mișcării.

Pentru a descrie din punct de vedere fizic mișcarea punctului material funcțiile parametrice (5.31) trebuie să fie continue, uniforme și cel puțin de două ori derivabile pe intervalul de definiție.

**Observația 5.5** Dacă există momente de timp în intervalul de mișcare pentru care raza polară se anulează, funcția  $\theta(t)$  poate fi discontinuă.

Dacă traiectoria nu este recunoscută din ecuațiile (5.31), se exprimă legile de mișcare în coordonate carteziene conform (5.27):

$$(\Gamma) : \begin{cases} x(t) = \rho(t) \cdot \cos \theta(t) \\ y(t) = \rho(t) \cdot \sin \theta(t), \\ z(t) = z(t) \end{cases} \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (5.32)$$

Conform (5.1), (5.27) și (5.30), vectorul de poziție al punctului  $P$  în coordonate cilindrice este dat de relația:

$$\bar{r} = \rho \cdot \bar{i}_\rho + z \cdot \bar{k}, \quad (5.33)$$

care rezultă și geometric din Figura V.5:

$$\bar{r} = \overline{OP} = \overline{OP_0} + \overline{P_0P}. \quad (5.34)$$

Conform (5.13) și (5.33), viteza este

$$\bar{v} = \dot{\rho} \cdot \bar{i}_\rho + \rho \cdot \dot{\bar{i}}_\rho + \dot{z} \cdot \bar{k}. \quad (5.35)$$

Derivând prima relație (5.29), se obține

$$\dot{\bar{i}}_\rho = \dot{\theta}(-\bar{i} \cdot \sin \theta + \bar{j} \cdot \cos \theta). \quad (5.36)$$

Înlocuind cea de-a doua relație (5.29) în (5.36), rezultă

$$\dot{\bar{i}}_\rho = \dot{\theta} \cdot \bar{i}_\theta. \quad (5.37)$$

Conform (5.35) și (5.37), viteza punctului  $P$  în coordonate cilindrice este:

$$\bar{v} = \dot{\rho} \cdot \bar{i}_\rho + \rho \dot{\theta} \cdot \bar{i}_\theta + \dot{z} \cdot \bar{k}. \quad (5.38)$$

Conform (5.16) și (5.38), accelerația este

$$\bar{a} = \ddot{\rho} \cdot \bar{i}_\rho + \dot{\rho} \cdot \dot{\bar{i}}_\rho + (\dot{\rho} \dot{\theta} + \rho \ddot{\theta}) \bar{i}_\theta + \rho \dot{\theta} \cdot \dot{\bar{i}}_\theta + \ddot{z} \cdot \bar{k}. \quad (5.39)$$

Derivând cea de-a doua relație (5.29), se obține

$$\dot{\bar{i}}_\theta = -\dot{\theta}(\bar{i} \cdot \cos \theta + \bar{j} \cdot \sin \theta). \quad (5.40)$$

Înlocuind prima relație (5.29) în (5.40), rezultă

$$\dot{\bar{i}}_\theta = -\dot{\theta} \cdot \bar{i}_\rho. \quad (5.41)$$

Conform (5.37), (5.39) și (5.41), accelerația punctului  $P$  în coordonate cilindrice este

$$\bar{a} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \bar{i}_\rho + (\rho \ddot{\theta} + 2\dot{\rho} \dot{\theta}) \bar{i}_\theta + \ddot{z} \cdot \bar{k}. \quad (5.42)$$

Conform (5.38) și (5.42), modulele vitezei și accelerației în coordonate cilindrice sunt

$$|\bar{v}| = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2}, \quad (5.43)$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{(\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2)^2 + (\rho \ddot{\theta} + 2\dot{\rho} \dot{\theta})^2 + \ddot{z}^2}, \quad (5.44)$$

și reprezintă valorile nominale ale vitezei și accelerației la momentul curent.

#### V.1.4. Traiectoria, viteza și accelerația în coordonate sferice

Se consideră un punct material  $P$  raportat la un reper triortogonal  $OXYZ$  cu versorii axelor de coordonate notați  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ . Se notează  $P_0$  proiecția punctului  $P$  în planul  $OXY$ . Coordonatele sferice ale punctului  $P$  sunt (Figura V.6):

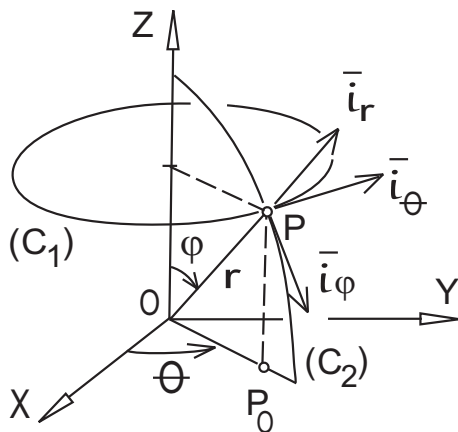


Figura V.6. Coordonatele sferice

- raza vectoroare  $r$ , definită ca distanță de la origine la punctul  $P$ ;
- unghiul polar  $\theta$ , definit ca unghi între semiaxa  $OX$  pozitivă și linia  $OP_0$ , măsurat în sens direct trigonometric în planul  $OXY$ ;
- unghiul cotei  $\varphi$ , definit ca unghi între semiaxa  $OZ$  pozitivă și raza vectoroare  $OP$ .

Relațiile de definiție ale coordonatelor sferice sunt:

$$r = \text{dist}(O, P), \quad \theta = \sphericalangle(OX, OP_0), \quad \varphi = \sphericalangle(OZ, OP). \quad (5.45)$$

Domeniile de definiție ale coordonatelor sferice sunt:

$$\rho \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi), \quad \varphi \in [0, \pi]. \quad (5.46)$$

Relațiile de legătură între coordonatele sferice și coordonatele carteziene sunt:

$$\begin{cases} x = r \cdot \sin \varphi \cdot \cos \theta \\ y = r \cdot \sin \varphi \cdot \sin \theta, \\ z = r \cdot \cos \varphi \end{cases} \quad (5.47)$$

respectiv

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \varphi = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \quad (5.48)$$

În coordonate sferice se definesc versorul razei vectorare, versorul unghiului polar și versorul unghiului cotei. Versorul razei vectorare ( $\vec{i}_r$ ) are direcția  $OP$  și sensul de la  $O$  spre  $P$ . Versorul unghiului polar ( $\vec{i}_\theta$ ) este perpendicular pe planul  $OP_0P$  și paralel cu planul  $OXY$ , fiind orientat în sensul creșterii unghiului polar. Versorul unghiului cotei ( $\vec{i}_\varphi$ ) este conținut în planul  $OP_0P$ , perpendicular pe raza vectorare  $OP$ , fiind orientat în sensul creșterii unghiului cotei. Triedrul ( $\vec{i}_r, \vec{i}_\theta, \vec{i}_\varphi$ ) este stâng orientat și are caracter intrinsec, având ca origine punctul  $P$ .

Relațiile de legătură între versorii sferici și versorii cartezieni sunt ([21], [27], [30]):

$$\begin{aligned} \vec{i}_r &= \vec{i} \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi + \vec{j} \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi + \vec{k} \cdot \cos \varphi \\ \vec{i}_\theta &= -\vec{i} \cdot \sin \theta + \vec{j} \cdot \cos \theta \\ \vec{i}_\varphi &= \vec{i} \cdot \cos \theta \cdot \cos \varphi + \vec{j} \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi - \vec{k} \cdot \sin \varphi, \end{aligned} \quad (5.49)$$

respectiv

$$\begin{aligned} \vec{i} &= \vec{i}_r \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi - \vec{i}_\theta \cdot \sin \theta + \vec{i}_\varphi \cdot \cos \theta \cdot \cos \varphi \\ \vec{j} &= \vec{i}_r \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi + \vec{i}_\theta \cdot \cos \theta + \vec{i}_\varphi \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi \\ \vec{k} &= \vec{i}_r \cdot \cos \varphi - \vec{i}_\varphi \cdot \sin \varphi. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Se cunosc legile de mișcare ale punctului material  $P$  în coordonate sferice, exprimate ca funcții de timp, care reprezintă ecuațiile parametrice ale traiectoriei:

$$(\Gamma) : r = r(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad t \in [t_0, t_1], \quad (5.51)$$



unde  $t_0$  este momentul inițial și  $t_1$  momentul final al mișcării.

Pentru a descrie din punct de vedere fizic mișcarea punctului material, funcțiile parametrice (5.51) trebuie să fie continue, uniforme și cel puțin de două ori derivabile pe intervalul de definiție.

**Observația 5.6** Dacă există momente de timp în intervalul de mișcare pentru care raza vectorie se anulează, funcțiile  $\theta(t)$  și  $\varphi(t)$  pot fi discontinue. Funcția  $\theta(t)$  poate fi discontinuă pentru  $\varphi = 0$  și  $\varphi = \pi$ .

Dacă traiectoria nu este recunoscută din ecuațiile (5.51), se exprimă legile de mișcare în coordonate carteziane conform (5.47):

$$(\Gamma) : \begin{cases} x(t) = r(t) \cdot \cos \theta(t) \cdot \sin \varphi(t) \\ y(t) = r(t) \cdot \sin \theta(t) \cdot \sin \varphi(t), \quad t \in [t_0, t_1]. \\ z(t) = r(t) \cdot \cos \varphi(t) \end{cases} \quad (5.52)$$

Conform (5.1), (5.47) și (5.50), vectorul de poziție al punctului  $P$  în coordonate sferice este dat de relația:

$$\bar{r} = r \cdot \bar{i}_r, \quad (5.53)$$

care rezultă și geometric din Figura V.6.

Conform (5.13) și (5.53), viteza este

$$\bar{v} = \dot{r} \cdot \bar{i}_r + r \cdot \dot{\bar{i}}_r. \quad (5.54)$$

Calculând derivata versorului  $\bar{i}_r$  conform (5.49), se obține

$$\dot{\bar{i}}_r = \dot{\theta} \cdot \bar{i}_\theta \cdot \sin \varphi + \dot{\varphi} \cdot \bar{i}_\varphi. \quad (5.55)$$

Conform (5.54) și (5.55), viteza punctului  $P$  în coordonate sferice este

$$\bar{v} = \dot{r} \cdot \bar{i}_r + r \dot{\theta} \sin \varphi \cdot \bar{i}_\theta + r \dot{\varphi} \cdot \bar{i}_\varphi. \quad (5.56)$$

Conform (5.16) și (5.56), accelerația este

$$\begin{aligned} \bar{a} = & \ddot{r} \cdot \bar{i}_r + \dot{r} \cdot \dot{\bar{i}}_r + (\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \bar{i}_\theta \cdot \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cdot \dot{\bar{i}}_\varphi \\ & + r \dot{\theta} (\dot{\bar{i}}_\theta \cdot \sin \varphi + \dot{\varphi} \bar{i}_\theta \cdot \cos \varphi) + (\dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}) \bar{i}_\varphi. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Calculând derivata versorului  $\bar{i}_\theta$  conform (5.49), se obține

$$\dot{\bar{i}}_\theta = -\dot{\theta} (\bar{i} \cdot \cos \theta + \bar{j} \cdot \sin \theta). \quad (5.58)$$

Înmulțind prima relație (5.49) cu  $(\sin \varphi)$  și a treia relație cu  $(\cos \varphi)$  și adunând rezultă:

$$\bar{i}_r \cdot \sin \varphi + \bar{i}_\varphi \cdot \cos \varphi = \bar{i} \cdot \cos \theta + \bar{j} \cdot \sin \theta. \quad (5.59)$$

Înlocuind (5.59) în (5.58), se obține

$$\dot{\bar{i}}_\theta = -\dot{\theta} (\bar{i}_r \cdot \sin \varphi + \bar{i}_\varphi \cdot \cos \varphi). \quad (5.60)$$

Calculând derivata versorului  $\bar{i}_\varphi$  conform (5.49), se obține

$$\dot{\bar{i}}_\varphi = \dot{\theta} \cdot \bar{i}_\theta \cdot \cos \varphi - \dot{\varphi} \cdot \bar{i}_r. \quad (5.61)$$

Înlocuind derivatele versorilor  $\bar{i}_r, \bar{i}_\theta$  și  $\bar{i}_\varphi$  conform (5.55), (5.60) respectiv (5.61) în (5.57) și grupând termenii, accelerația punctului  $P$  în coordonate sferice este:

$$\bar{a} = a_r \cdot \bar{i}_r + a_\theta \cdot \bar{i}_\theta + a_\varphi \cdot \bar{i}_\varphi \quad (5.62)$$

cu următoarele componente:

$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r \dot{\varphi}^2 - r \dot{\theta}^2 \cdot \sin^2 \varphi \\ a_\theta &= r \ddot{\theta} \cdot \sin \varphi + 2r \dot{\theta} \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi + 2\dot{r} \dot{\theta} \cdot \sin \varphi \\ a_\varphi &= r \ddot{\varphi} + 2\dot{r} \dot{\varphi} - r \dot{\theta}^2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Conform (5.56) și (5.62), modulele vitezei și accelerației în coordonate sferice sunt

$$|\bar{v}| = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \cdot \sin^2 \varphi + r^2 \dot{\varphi}^2}, \quad (5.64)$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2 + a_\varphi^2}, \quad (5.65)$$

unde  $a_r, a_\theta, a_\varphi$  sunt date de (5.63) și reprezintă valorile nominale ale vitezei și accelerației la momentul curent.

### V.1.5. Viteza și accelerația în coordonate intrinseci

Mișcarea punctului material se raportează la coordonata intrinsecă în cazul în care este cunoscută traiectoria.

Se consideră un punct material  $P$  în mișcare pe o traiectorie dată ( $\Gamma$ ). Pe curba ( $\Gamma$ ) se stabilește o origine  $O'$  și un sens pozitiv. Coordonata intrinsecă a punctului material  $P$  pe traiectoria ( $\Gamma$ ) este definită ca lungimea orientată a arcului de curbă dintre originea  $O'$  și punctul  $P$ , notată  $s$ . Dacă de la  $O'$  la  $P$  curba este parcursă în sens pozitiv, coordonata intrinsecă este pozitivă, în sens contrar este negativă. Pe curba ( $\Gamma$ ) se definesc versorii reperului intrinsec, versorul tangent și versorul normal. Versorul tangent  $\bar{\tau}$  are direcția tangentei la curbă în poziția curentă și este orientat spre sensul pozitiv stabilit pe curbă. Versorul normal  $\bar{\nu}$  are direcția normalei principale la curbă în poziția curentă și este orientat spre centrul de curbura al acesteia. Normala principală este normala conținută în planul osculator al curbei ([10], [18], [29]).

Se cunoaște legea de mișcare a punctului material  $P$  în coordonata intrinsecă, exprimată ca funcție de timp, care reprezintă ecuația parametrică a mișcării:

$$(\Gamma) : s = s(t), \quad t \in [t_0, t_1], \quad (5.66)$$

unde  $t_0$  este momentul inițial și  $t_1$  momentul final al mișcării.

Pentru a descrie din punct de vedere fizic mișcarea punctului material, funcția parametrică (5.66) trebuie să fie continuă, uniformă și cel puțin de două ori derivabilă pe intervalul de definiție.

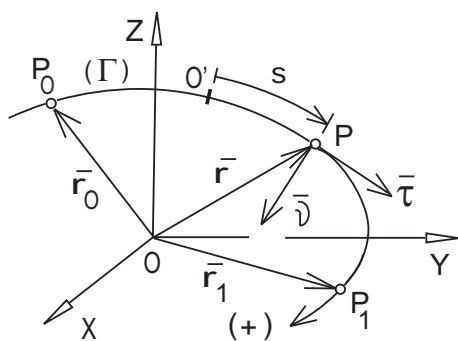


Figura V.7. Coordonata intrinsecă

Raportând traiectoria  $(\Gamma)$  la un reper triortogonal  $OXYZ$  cu versorii axelor de coordonate notați  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ , versorul tangent  $\bar{\tau}$  se exprimă în funcție de coordonata intrinsecă printr-o relație din geometria diferențială ([5], [27], [29]), cunoscută ca prima formulă a lui Frenet:

$$\bar{\tau} = \frac{d\bar{r}}{ds}, \quad (5.67)$$

unde  $\bar{r}$  este vectorul de poziție al punctului  $P$  în reperul considerat:

$$\bar{r} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}. \quad (5.68)$$

Conform (5.13) și (5.67), viteza punctului  $P$  în coordonata intrinsecă este

$$\bar{v} = \dot{s} \bar{\tau}, \quad \dot{s} = \frac{ds}{dt}. \quad (5.69)$$

Conform (5.16) și (5.69), accelerația în coordonata intrinsecă este

$$\bar{a} = \ddot{s} \bar{\tau} + \dot{s} \dot{\bar{\tau}}, \quad \dot{\bar{\tau}} = \frac{d^2 s}{dt^2}. \quad (5.70)$$

Derivata versorului tangent în raport cu parametrul  $t$  se exprimă în funcție de coordonata intrinsecă printr-o relație din geometria diferențială ([5], [27], [29]), cunoscută ca a doua formulă a lui Frenet:

$$\dot{\bar{\tau}} = \frac{\dot{s}}{R_C} \bar{\nu}, \quad (5.71)$$

unde  $R_C$  reprezintă raza de curbură a traiectoriei  $(\Gamma)$  în poziția curentă.

Conform (5.70) și (5.71), accelerația punctului  $P$  în coordonata intrinsecă este

$$\bar{a} = \ddot{s} \bar{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{R_C} \bar{\nu}. \quad (5.72)$$

Conform (5.69) și (5.72), modulele vitezei și accelerației în coordonata intrinsecă sunt

$$|\bar{v}| = |\dot{s}|, \quad |\bar{a}| = \sqrt{\ddot{s}^2 + \frac{\dot{s}^4}{R_C^2}} \quad (5.73)$$

și reprezintă valorile nominale ale vitezei și accelerației la momentul curent.

**Observația 5.7** Expresiile vitezei și accelerației în coordonata intrinsecă permit calcularea razei de curbură a traiectoriei cu relația ([12], [20], [21]):

$$R_C = \frac{|\bar{v}|^3}{|\bar{v} \times \bar{a}|}. \quad (5.74)$$

### V.1.6. Studiul calitativ al mișcării punctului material

Studiul calitativ se referă la stabilirea caracterului mișcării, adică dacă mișcarea este accelerată, încetinită sau uniformă.

**Definiția 5.6** Un punct material are o mișcare uniformă dacă viteza este constantă ca valoare în timp

$$|\bar{v}| = \text{const.} \quad (5.75)$$

Definiția prezintă două completări: dacă viteza este crescătoare, mișcarea este accelerată, iar dacă viteza este descrescătoare, mișcarea este încetinită.

Se consideră un punct material  $P$  raportat la un reper triortogonal  $OXYZ$ . Starea de mișcare a punctului material este exprimată prin funcția de variație în timp a vectorului de poziție:

$$\bar{r} = \overline{OP} = \bar{r}(t), \quad t \in [t_0, t_3], \quad (5.76)$$

unde  $t_0$  este momentul inițial și  $t_3$  momentul final al mișcării.

Punctul material are o mișcare accelerată dacă viteza este crescătoare ca valoare:

$$|\bar{v}(t_1)| < |\bar{v}(t_2)|, \quad \forall t_1, t_2 \in [t_0, t_3], \quad t_1 < t_2. \quad (5.77)$$

Punctul material are o mișcare încetinită dacă viteza este descrescătoare ca valoare:

$$|\bar{v}(t_1)| > |\bar{v}(t_2)|, \quad \forall t_1, t_2 \in [t_0, t_3], \quad t_1 < t_2. \quad (5.78)$$

Efectuând produsul scalar dintre viteză și accelerație, conform (5.69) și (5.72) se obține:

$$\bar{v} \cdot \bar{a} = \dot{s} \cdot \ddot{s} = v \cdot \dot{v} = v \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt}(v^2). \quad (5.79)$$

Pătratul vitezei din (5.79) are aceeași monotonie ca funcția de modul a vitezei, crescătoare sau descrescătoare. Derivata unei funcții crescătoare este pozitivă, iar derivata unei funcții descrescătoare este negativă, rezultate cunoscute din analiza matematică ([1], [16], [23]).

Astfel, se pot formula următoarele concluzii asupra mișcării punctului material, pe baza semnului produsului scalar dintre viteză și accelerație:

- dacă produsul scalar este pozitiv, mișcarea este accelerată;
- dacă produsul scalar este nul, mișcarea este uniformă;
- dacă produsul scalar este negativ, mișcarea este încetinită.

### V.1.7. Cazuri particulare de mișcări ale punctului material

**V.1.7.a. Mișcarea rectilinie.** Un punct material are o mișcare rectilinie atunci când traiectoria este un segment de dreaptă. Mișcarea se raportează la un reper astfel ca axa  $OX$  să coincidă cu traiectoria punctului. Ecuația parametrică a mișcării este dată de variația abscisei în timp:

$$x = x(t), \quad t \in [t_0, t_1], \quad (5.80)$$

unde  $t_0$  este momentul inițial și  $t_1$  momentul final al mișcării, funcție continuă, uniformă și cel puțin de două ori derivabilă pe intervalul de definiție.

Viteza și accelerația punctului material sunt:

$$v = \dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad a = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (5.81)$$

Dacă viteza este constantă, mișcarea se numește *rectilinie uniformă*, dacă accelerația este constantă, mișcarea se numește *rectilinie uniform variată*.

**V.1.7.b. Mișcarea rectilinie oscilatorie armonică.** Un caz particular al mișcării rectilinii este mișcarea rectilinie oscilatorie armonică. Această mișcare se obține atunci când funcția  $x(t)$  din (5.80) este o funcție armonică de forma:

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi), \quad t \geq 0, \quad (5.82)$$

unde  $A, \omega$  și  $\varphi$  sunt constante reale,  $\varphi \in [0, 2\pi)$ .

Viteza și accelerația punctului material sunt:

$$\begin{aligned} v = \dot{x} &= \omega A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi), \\ a = \ddot{x} &= -\omega^2 A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi). \end{aligned} \quad (5.83)$$

Traectoria punctului material este un segment de dreaptă pe axa  $OX$  simetric în jurul originii, între punctele de abscise  $(-A)$  și  $A$ .

Poziția inițială a punctului material este:

$$x_0 = x(0) = A \cdot \sin \varphi. \quad (5.84)$$

Mișcarea este periodică, de perioadă  $T = 2\pi/|\omega|$ :

$$x(t) = x(t + T), \quad t \geq 0. \quad (5.85)$$

Constantele din (5.82) se numesc:  $|A|$  amplitudinea mișcării,  $|\omega|$  pulsația și  $\varphi$  faza inițială. Unitățile de măsură pentru acestea sunt:

$$\langle |A| \rangle = m, \quad \langle |\omega| \rangle = s^{-1}, \quad \langle \varphi \rangle = \text{rad}.$$

**Observația 5.8** Mișcarea rectilinie oscilatorie armonică reprezintă modelul matematic al fenomenelor dinamice de vibrații liniare ale punctului material și corpului solid rigid.

**V.1.7.c. Mișcarea circulară.** Un punct material are o mișcare circulară atunci când traiectoria este un cerc sau un arc de cerc. Mișcarea se raportează la un reper astfel ca planul cercului să coincidă cu planul  $OXY$  și centrul cercului să coincidă cu originea. Ecuațiile parametrice ale mișcării sunt date de legile de variație în timp ale coordonatelor polare:

$$\rho = R, \quad \theta = \theta(t), \quad t \in [t_0, t_1], \quad (5.86)$$

unde  $R$  este raza traiectoriei,  $t_0$  este momentul inițial și  $t_1$  momentul final al mișcării, funcție continuă, uniformă și cel puțin de două ori derivabilă pe intervalul de definiție.

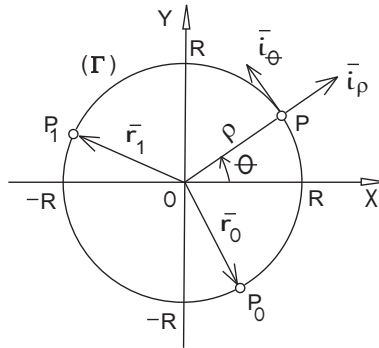


Figura V.8. Mișcarea circulară

Conform (5.38) și (5.86), viteza punctului material este

$$\bar{v} = R \dot{\theta} \cdot \bar{i}_\theta, \quad |\bar{v}| = R|\dot{\theta}|. \quad (5.87)$$

Conform (5.42) și (5.86), accelerația punctului material este

$$\bar{a} = -R \dot{\theta}^2 \bar{i}_\rho + R \ddot{\theta} \bar{i}_\theta, \quad |\bar{a}| = R\sqrt{\dot{\theta}^4 + \ddot{\theta}^2}. \quad (5.88)$$

**Definiția 5.7** Prima derivată a unghiului polar în raport cu parametrul  $t$  se numește *viteză unghiulară* și se notează omega ([1], [30]):

$$\omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}, \quad \bar{\omega} = \omega \cdot \bar{k}, \quad (5.89)$$

mărime vectorială pe direcția axei  $OZ$ .

Unitățile de măsură pentru viteza unghiulară sunt radianul pe secundă,  $\langle \omega \rangle = \text{rad/s}$  sau  $s^{-1}$ .

**Definiția 5.8** A doua derivată a unghiului polar în raport cu parametrul  $t$  se numește *accelerație unghiulară* și se notează epsilon ([1], [30]):

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2}, \quad \bar{\varepsilon} = \varepsilon \cdot \bar{k}, \quad (5.90)$$

mărime vectorială pe direcția axei  $OZ$ .

Unitățile de măsură pentru accelerația unghiulară sunt radianul pe secundă la pătrat,  $\langle \varepsilon \rangle = \text{rad/s}^2$  sau  $s^{-2}$ .

**V.1.7.d. Mișcarea circulară uniformă.** Un caz particular al mișcării circulare este mișcarea circulară uniformă, cu viteză constantă ca valoare. Această mișcare se obține atunci când funcția  $\theta(t)$  din (5.86) este o funcție liniară:

$$\theta(t) = \omega_0 \cdot t + \theta_0, \quad t \geq 0, \quad (5.91)$$

unde  $\omega_0$  și  $\theta_0$  sunt constante reale,  $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ .

Conform (5.87), (5.88) și (5.91), viteza și accelerația punctului material sunt

$$\bar{v} = R \cdot \omega_0 \bar{i}_\theta, \quad \bar{a} = -R \cdot \omega_0^2 \bar{i}_\rho, \quad (5.92)$$

unde  $R$  este raza traiectoriei circulare din (5.86).

Constanta  $\omega_0$  din (5.91) reprezintă viteza unghiulară a mișcării, conform (5.89).

Mișcarea este periodică în coordonate carteziene, de perioadă  $T = 2\pi/|\omega_0|$ :

$$x(t) = x(t + T), \quad y(t) = y(t + T), \quad t \geq 0. \quad (5.93)$$

**Observația 5.9** Proiecția unui punct material în mișcare circulară uniformă pe un diametru al cercului este un punct în mișcare oscilatorie armonică.

## V.2. Cinematica solidului rigid

Subiectul acestui subcapitol al cursului este modelul mecanic de corp solid rigid.

Cinematica corpului solid rigid studiază mișcarea mecanică a acestui model fizic, adică un corp de dimensiuni măsurabile având o formă geometrică precizată, fără a lua în considerare masa și forțele care acționează asupra acestuia. Problema directă în studiul cinematic al corpului solid rigid are ca obiect determinarea traiectoriilor, vitezelor și accelerațiilor punctelor corpului în ipoteza în care se cunosc legile de mișcare. Aceste legi sunt exprimate la modul general pentru corpul în mișcare și permit determinarea traiectoriei, vitezei și accelerației unui punct oarecare al corpului prin aplicarea formulelor de calcul corespunzătoare.

Un corp solid rigid în mișcare prezintă un câmp de viteze și un câmp de accelerații, deoarece corpul are o infinitate de puncte. Câmpurile de viteze și de accelerații sunt câmpuri vectoriale și sunt exprimate analitic prin formula vitezelor, respectiv formula accelerațiilor, specifice pentru fiecare tip de mișcare în parte.

Cea mai simplă formă geometrică a unui corp solid rigid în mișcare este segmentul de dreaptă, dar acest model nu acoperă cazul general al corpurilor tridimensionale.

Studiul cinematic al corpului solid se face în ipoteza de rigiditate, deoarece formulele stabilite pentru viteze și accelerații sunt valabile în condițiile în care nu există mișcări relative între punctele corpului. Ipoteza de rigiditate presupune ca distanța dintre două puncte oarecare ale corpului să nu se modifice în timpul mișcării. Această ipoteză are și o consecință asupra vitezelor. Astfel, în cazul mișcării unui corp solid rigid, proiecțiile vitezelor a două puncte oarecare ale corpului pe dreapta determinată de cele două puncte sunt egale. Rezultatul este valabil pentru orice tip de mișcare în ipoteza de rigiditate. Trajectoriile, vitezele și accelerațiile punctelor unui corp solid rigid în mișcare se definesc la fel ca în cazul punctului material, care poate fi considerat un caz particular de corp solid, corpul cu un singur punct.

Studiul cinematic al corpului solid rigid presupune două repere de referință, un reper fix la care se raportează poziția corpului și un reper mobil legat solidar de corp la care se raportează punctele corpului conform geometriei acestuia. Condiția de legare solidară implică poziția fixă a corpului în reperul mobil pe timpul mișcării, adică reperul mobil este chiar corpul a cărui mișcare se studiază, reperul fix fiind un alt corp solid rigid aflat în repaos. În continuare, prin reper de referință se va înțelege reperul fix. Reperele uzuale sunt triortogonale, în care se exprimă coordonatele carteziene ale punctelor corpului. Reperul fix se notează  $OXYZ$ , iar reperul mobil  $QX'Y'Z'$ , notațiile versorilor axelor de coordonate fiind  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  pentru reperul fix,  $\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'$  pentru reperul mobil.

Modelul mecanic de corp solid rigid prezintă șase grade de libertate în spațiu. Raportând corpul la un reper triortogonal fix  $OXYZ$  acestea sunt cele trei translații pe axele de coordonate  $OX, OY, OZ$  și cele trei rotații în jurul acestor axe. Poziția corpului în raport cu reperul de referință  $OXYZ$  este dată prin parametri de poziție, care în studiul cinematic se numesc parametri cinematici. Considerând un reper triortogonal  $QX'Y'Z'$  legat solidar de corp, parametrii de poziție sunt coordonate carteziene și unghiuri care dau poziția reperului mobil în raport cu reperul fix. Pentru gradele de libertate de translație parametrii de poziție sunt cele trei coordonate carteziene în reperul fix ale polului  $Q$ , originea reperului mobil. Pentru gradele de libertate de rotație parametrii de poziție sunt trei unghiuri definite între axele reperului mobil și axele reperului fix, numite unghiurile lui Euler, după numele matematicianului și fizicianului elvețian Leonhard Euler (1707-1783).

Pentru definirea unghiurilor lui Euler se consideră un reper triortogonal intermediar  $O''X''Y''Z''$  având originea comună cu reperul mobil ( $O'' \equiv Q$ ) și axele de coordonate paralele și de același sens cu axele reperului fix ( $O''X'' \parallel OX, O''Y'' \parallel OY, O''Z'' \parallel OZ$ , Figura V.9). Se notează  $QN$  dreapta de intersecție a planelor  $QX'Y'$  și  $O''X''Y''$ , dreaptă numită linia nodurilor:

$$QN = QX'Y' \cap O''X''Y''. \quad (5.94)$$

Cele trei unghiuri ale lui Euler se numesc *unghi de precesie*, *unghi de rotație proprie* și *unghi de nutație*, denumiri specifice disciplinei de astronomie, ca și linia nodurilor.

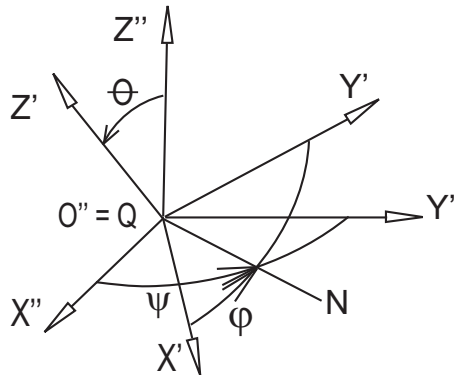


Figura V.9. Unghiurile lui Euler



Unghiul de precesie se definește între semiaxa  $X''$  pozitivă și linia nodurilor, măsurat în sens direct trigonometric în planul  $O''X''Y''$  și notat  $\psi$ :

$$\psi = \sphericalangle(O''X'', QN) = \sphericalangle(OX, QN). \quad (5.95)$$

Unghiul de rotație proprie se definește între semiaxa  $X'$  pozitivă și linia nodurilor, măsurat în sens direct trigonometric în planul  $QX'Y'$  și notat  $\varphi$ :

$$\varphi = \sphericalangle(QX', QN). \quad (5.96)$$

Unghiul de nutație se definește între semiaxa  $Z''$  pozitivă și semiaxa  $Z'$  pozitivă, notat  $\theta$ :

$$\theta = \sphericalangle(O''Z'', QZ') = \sphericalangle(OZ, QZ'). \quad (5.97)$$

Ca parametri de poziție, domeniile de valori ale unghiurilor lui Euler sunt:

$$\psi \in [0, 2\pi), \quad \varphi \in [0, 2\pi), \quad \theta \in [0, \pi]. \quad (5.98)$$

**Observația 5.10** Ca parametri cinematici, unghiurile lui Euler pot fi exprimate ca funcții de timp al căror codomeniu depășește intervalele din (5.98). În aceste cazuri, valoarea unghiului împărțită la  $2\pi$  indică numărul de rotații complete efectuate de corp.

În cazul cel mai general poziția corpului solid rigid în raport cu reperul de referință fix  $OXYZ$  este dată prin șase parametri de poziție care corespund celor șase grade de libertate: trei translații pe axele  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  și trei rotații în jurul acestor axe. Cele trei rotații în jurul axelor de coordonate sunt echivalente cu trei rotații simple în planele unghiurilor lui Euler ([12], [22], [28]). Astfel, ca parametri de poziție ai corpului se consideră cele trei coordonate (carteziene) ale originii mobile în reperul fix și cele trei unghiuri ale lui Euler.

Se consideră un corp solid rigid ( $S$ ) raportat la un reper de referință fix  $OXYZ$  și la un reper solidar legat de corp  $QX'Y'Z'$ . Starea de mișcare mecanică a corpului solid rigid este dată de modificarea poziției în timp, fiind exprimată prin funcțiile de variație în timp ale parametrilor de poziție, cele trei coordonate ale polului  $Q$  în reperul fix  $(x_Q, y_Q, z_Q)$  și cele trei unghiuri ale lui Euler  $(\psi, \varphi, \theta)$ :

$$\begin{aligned} x_Q &= x_Q(t), & y_Q &= y_Q(t), & z_Q &= z_Q(t), \\ \psi &= \psi(t), & \varphi &= \varphi(t), & \theta &= \theta(t), \end{aligned} \quad t \in [t_0, t_1], \quad (5.99)$$

unde  $t_0$  reprezintă momentul inițial și  $t_1$  momentul final al mișcării.

Pentru a descrie din punct de vedere fizic mișcarea corpului solid rigid, funcțiile din relația (5.99) trebuie să fie continue, uniforme și cel puțin de două ori derivabile în raport cu variabila  $t$  (timpul) pe domeniul de definiție, la fel ca în cazul punctului material (subcapitolul V.1).

**Observația 5.11** Există cazuri de mișcare ale corpului solid rigid în care funcțiile  $\psi(t)$  și  $\varphi(t)$  pot fi discontinue la anumite momente de timp, datorită condiției ca aceste unghiuri să fie măsurate în sens direct trigonometric.

Funcțiile (5.99) se mai numesc parametri cinematici de ordinul zero ai corpului solid rigid.

### V.2.1. Mișcarea de translație

**Definiția 5.9** Un corp solid are o mișcare de translație atunci când un segment de dreaptă între două puncte oarecare ale sale ocupă poziții paralele în spațiu.

În mișcarea de translație, punctele corpului au traiectorii identice, aceleași viteze și aceleași accelerații la un moment dat. Forma geometrică a traiectoriei unui punct al corpului dă numele mișcării de translație: translație rectilinie, translație circulară etc. Mișcarea de translație este cea mai simplă mișcare a corpului solid rigid, studiul acesteia se poate reduce la mișcarea unui singur punct al corpului, nefiind necesar reperul mobil.

Se consideră un corp solid rigid ( $\mathcal{S}$ ) raportat la un reper triortogonal fix  $OXYZ$ . Mișcarea de translație a corpului ( $\mathcal{S}$ ) prezintă trei grade de libertate: corpul poate avea translații pe axele  $OX, OY, OZ$ . Gradele de libertate sunt exprimate analitic prin cele trei coordonate carteziene ale unui punct al corpului notat  $Q$ , originea reperului mobil:  $x_Q, y_Q, z_Q$ . Dacă este precizată traiectoria punctului  $Q$  în reperul fix  $OXYZ$ , numărul gradelor de libertate se reduce la unu, posibilitatea de mișcare a unui punct pe o curbă dată.

Mișcarea de translație a corpului ( $\mathcal{S}$ ) este complet determinată dacă se cunosc în orice moment coordonatele carteziene ale punctului  $Q$  în reperul de referință:

$$Q : x_Q = x_Q(t), y_Q = y_Q(t), z_Q = z_Q(t), \quad t \in [t_0, t_1], \quad (5.100)$$

unde  $t_0$  este momentul inițial și  $t_1$  momentul final al mișcării, coordonate care dau vectorul de poziție al punctului  $Q$ :

$$\bar{r}_Q = x_Q \cdot \bar{i} + y_Q \cdot \bar{j} + z_Q \cdot \bar{k}. \quad (5.101)$$

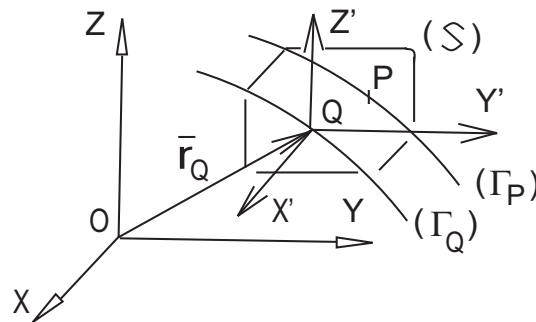


Figura V.10. Mișcarea de translație

În mișcarea de translație, reperul mobil are axele paralele cu axele reperului fix ( $QX' \parallel OX, QY' \parallel OY, QZ' \parallel OZ$ ). Nu se definesc unghiurile lui Euler.

Ecuatiile (5.100) sunt ecuațiile parametriche ale mișcării de translație sau *parametrii cinematici de ordinul zero*. Pentru a descrie din punct de vedere fizic mișcarea, funcțiile de timp (5.100) trebuie să fie continue, uniforme și cel puțin de două ori derivabile pe intervalul de definiție.

Viteza și accelerația punctului  $Q$  al corpului ( $\mathcal{S}$ ) în mișcare de translație se definesc prin relațiile (5.13), respectiv (5.17), în care se înlocuiește vectorul de poziție din (5.101) și constituie *parametrii cinematici de ordinul întâi*, respectiv *doi*:

$$\begin{aligned}\bar{v}_Q &= \dot{x}_Q \cdot \bar{i} + \dot{y}_Q \cdot \bar{j} + \dot{z}_Q \cdot \bar{k} \\ \bar{a}_Q &= \ddot{x}_Q \cdot \bar{i} + \ddot{y}_Q \cdot \bar{j} + \ddot{z}_Q \cdot \bar{k},\end{aligned}\quad (5.102)$$

notațiile fiind cele cunoscute din V.1:

$$\dot{x}_Q = \frac{dx_Q}{dt}, \quad \dot{y}_Q = \frac{dy_Q}{dt}, \quad \dot{z}_Q = \frac{dz_Q}{dt}, \quad \ddot{x}_Q = \frac{d^2x_Q}{dt^2}, \quad \ddot{y}_Q = \frac{d^2y_Q}{dt^2}, \quad \ddot{z}_Q = \frac{d^2z_Q}{dt^2}. \quad (5.103)$$

Viteza și accelerația unui punct oarecare  $P$  al corpului ( $\mathcal{S}$ ) în mișcare de translație sunt aceleași cu viteza, respectiv accelerația punctului  $Q$ , proprietăți care rezultă din definiția mișcării:

$$\bar{v} = \bar{v}_Q, \quad \bar{a} = \bar{a}_Q. \quad (5.104)$$

## V.2.2. Mișcarea de rotație plană

**Definiția 5.10** Un corp solid rigid are o mișcare de rotație plană (rotație simplă) atunci când un segment de dreaptă al acestuia ocupă poziție fixă în spațiu.

Axa care conține segmentul fix de dreaptă se numește *axă de rotație* și poate să nu intersecteze volumul fizic al corpului, fiind solidară cu corpul, adică are în orice moment al mișcării aceeași poziție relativă față de corp. Mișcarea de rotație plană sau simplă se mai numește și *mișcare de rotație în jurul unei axe fixe*. Axa de rotație se notează în mod curent ( $\Delta$ ).

Se consideră un corp solid rigid ( $\mathcal{S}$ ) raportat la un reper triortogonal  $OXYZ$ . Reperul mobil se consideră cu originea comună cu reperul fix, astfel încât axele  $QZ'$  și  $OZ$  să coincidă (Figura V.11):

$$O \equiv Q, \quad QZ' \equiv OZ \equiv (\Delta). \quad (5.105)$$

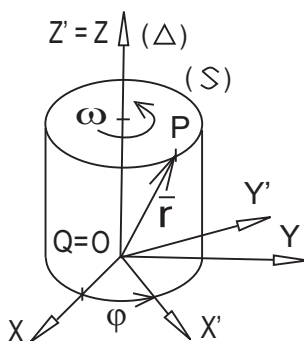


Figura V.11. Mișcarea de rotație plană

Mișcarea de rotație a corpului ( $\mathcal{S}$ ) în jurul axei fixe ( $\Delta$ ) prezintă un grad de libertate: corpul se poate roti în jurul axei  $OZ$ . Gradul de libertate este exprimat analitic prin unghiul de poziție dintre axa fixă  $OX$  și axa mobilă  $QX'$ , notat  $\varphi$ .

Mișcarea de rotație a corpului ( $\mathcal{S}$ ) este complet determinată dacă se cunoaște în orice moment unghiul de rotație:

$$\varphi = \varphi(t), \quad t \in [t_0, t_1], \quad (5.106)$$

unde  $t_0$  este momentul inițial și  $t_1$  momentul final al mișcării.

Ecuția (5.106) este ecuația parametrică a mișcării de rotație în jurul unei axe fixe sau *parametrul cinematic de ordinul zero*. Pentru a descrie din punct de vedere fizic mișcarea, funcția de timp (5.106) trebuie să fie continuă, uniformă și cel puțin de două ori derivabilă pe intervalul de definiție.

Viteza și accelerația unghiulară a corpului ( $\mathcal{S}$ ) în mișcare de rotație plană sunt definite de relațiile (5.89), respectiv (5.90), în care se înlocuiește notația  $\theta$  cu  $\varphi$ , prin analogie cu mișcarea circulară a punctului material și constituie *parametrii cinematici de ordinul întâi*, respectiv *doi*:

$$\bar{\omega} = \dot{\varphi} \bar{k} = \dot{\varphi} \bar{k}', \quad \bar{\varepsilon} = \ddot{\varphi} \bar{k} = \ddot{\varphi} \bar{k}', \quad (5.107)$$

notațiile fiind cele cunoscute din V.1.

Relațiile de legătură între versorii reperului mobil și versorii reperului fix, stabilite pe baza definiției produsului scalar, sunt ([12], [20], [30]):

$$\begin{cases} \bar{i}' = \bar{i} \cdot \cos \varphi + \bar{j} \cdot \sin \varphi, \\ \bar{j}' = -\bar{i} \cdot \sin \varphi + \bar{j} \cdot \cos \varphi, \\ \bar{k}' = \bar{k}, \end{cases} \quad (5.108)$$

relații care dau versorii mobili ca funcții de timp prin unghiul de rotație  $\varphi$ .

Derivând relațiile (5.108) în raport cu timpul, se obține:

$$\begin{cases} \dot{\bar{i}}' = -\dot{\varphi} \bar{i} \cdot \sin \varphi + \dot{\varphi} \bar{j} \cdot \cos \varphi = \dot{\varphi} \cdot \bar{j}', \\ \dot{\bar{j}}' = -\dot{\varphi} \bar{i} \cdot \cos \varphi - \dot{\varphi} \bar{j} \cdot \sin \varphi = -\dot{\varphi} \cdot \bar{i}', \\ \dot{\bar{k}}' = \bar{0}. \end{cases} \quad (5.109)$$

Se consideră un punct oarecare  $P$  aparținând corpului ( $\mathcal{S}$ ) în mișcare. Vectorii de poziție ai punctului  $P$  în reperul fix și în reperul mobil coincid, deoarece reperatele au originea comună:

$$\bar{r} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k} = x' \cdot \bar{i}' + y' \cdot \bar{j}' + z' \cdot \bar{k}' = \bar{r}', \quad (5.110)$$

unde  $(x, y, z)$  sunt coordonatele punctului  $P$  în reperul  $OXYZ$ , iar  $(x', y', z')$  sunt coordonatele în reperul  $QX'Y'Z'$ .

Viteza punctului  $P$  se definește prin relația (5.13) în care se înlocuiește (5.110):

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} \quad \text{sau} \quad \bar{v} = \frac{d\bar{r}'}{dt}. \quad (5.111)$$

Conform (5.110) și (5.111), se obține

$$\bar{v} = x' \cdot \bar{i}' + y' \cdot \bar{j}' + z' \cdot \bar{k}', \quad (5.112)$$

deoarece  $x', y', z'$  sunt constante, conform condiției ca reperul mobil să fie solidar legat de corpul solid rigid ( $\mathcal{S}$ ).

Înlocuind (5.109) în (5.112), se obține

$$\bar{v} = \dot{\varphi} x' \cdot \bar{j}' - \dot{\varphi} y' \cdot \bar{i}', \quad (5.113)$$

expresie care este egală cu dezvoltarea produsului vectorial dintre vectorul vitează unghiulară din (5.107) și vectorul de poziție al punctului  $P$  în reperul mobil din (5.110):

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}'. \quad (5.114)$$

Relația (5.114) reprezintă formula vitezei în mișcarea de rotație în jurul unei axe fixe.

Conform (5.113), componentele vitezei pe axele reperului mobil sunt:

$$v'_x = -\dot{\varphi} \cdot y', \quad v'_y = \dot{\varphi} \cdot x', \quad v'_z = 0. \quad (5.115)$$

Conform (5.108) și (5.113), componentele vitezei pe axele reperului fix sunt:

$$\begin{aligned} v_x &= -\dot{\varphi} x' \cdot \sin \varphi - \dot{\varphi} y' \cdot \cos \varphi, \\ v_y &= \dot{\varphi} x' \cdot \cos \varphi - \dot{\varphi} y' \cdot \sin \varphi. \end{aligned} \quad (5.116)$$

Modulul vitezei este

$$|\bar{v}| = \sqrt{v_x'^2 + v_y'^2} = |\dot{\varphi}| \sqrt{x'^2 + y'^2}. \quad (5.117)$$

Accelerația punctului  $P$  se definește prin relația (5.16), în care se înlocuiește (5.114):

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\bar{\omega} \times \bar{r}'). \quad (5.118)$$

Prin derivarea factorilor, se obține:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r}' + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}'}{dt}. \quad (5.119)$$

Derivata vitezei unghiulare reprezintă accelerația unghiulară conform (5.107), iar derivata vectorului de poziție reprezintă viteza punctului conform (5.111). Rezultă:

$$\bar{a} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}' + \bar{\omega} \times \bar{v}, \quad (5.120)$$

sau încă, înlocuind viteza conform (5.114):

$$\bar{a} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}' + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}'). \quad (5.121)$$

Relația (5.121) reprezintă formula accelerației în mișcarea de rotație în jurul unei axe fixe.

Conform (5.107), (5.110), (5.113) și (5.120), componentele accelerației pe axele reperului mobil sunt:

$$a'_x = -\dot{\varphi}^2 x' - \ddot{\varphi} y', \quad a'_y = \ddot{\varphi} x' - \dot{\varphi}^2 y', \quad a'_z = 0. \quad (5.122)$$

Conform (5.116) și (5.118), componentele accelerației pe axele reperului fix sunt:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad a_z = 0, \quad (5.123)$$

$$\begin{aligned} a_x &= -(\dot{\varphi}^2 x' + \ddot{\varphi} y') \cos \varphi - (\ddot{\varphi} x' - \dot{\varphi}^2 y') \sin \varphi, \\ a_y &= -(\dot{\varphi}^2 x' + \ddot{\varphi} y') \sin \varphi + (\ddot{\varphi} x' - \dot{\varphi}^2 y') \cos \varphi. \end{aligned} \quad (5.124)$$

Modulul accelerației este

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x'^2 + a_y'^2} = \sqrt{\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}. \quad (5.125)$$

În mișcarea de rotație în jurul unei axe fixe, câmpurile de viteze și de accelerații sunt date de relațiile (5.114) și (5.121):

$$P : \begin{cases} \bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}' \\ \bar{a} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}' + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}'), \end{cases} \quad (5.126)$$

unde viteza unghiulară  $\bar{\omega}$  și accelerația unghiulară  $\bar{\varepsilon}$  sunt definite în (5.107) cu (5.106), iar vectorul de poziție al punctului  $P$  în reperul mobil este definit în (5.110):

$$\bar{r}' = x' \cdot \bar{i}' + y' \cdot \bar{j}' + z' \cdot \bar{k}'. \quad (5.127)$$

Vectorul de poziție poate fi descompus în două componente, normală, respectiv coliniară, cu axa mișcării:

$$\bar{r}' = \bar{r}'_n + r'_c, \quad \bar{r}'_n = x' \cdot \bar{i}' + y' \cdot \bar{j}', \quad \bar{r}'_c = z' \cdot \bar{k}'. \quad (5.128)$$

Înlocuind (5.128) în produsele vectoriale din (5.126), se obține:

$$\bar{\omega} \times \bar{r}' = \bar{\omega} \times \bar{r}'_n, \quad \bar{\varepsilon} \times \bar{r}' = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}'_n, \quad (5.129)$$

deoarece produsul vectorial a doi vectori coliniari este nul.

Înlocuind prima relație (5.129) în dublul produs vectorial din (5.126) și aplicând formula de dezvoltare (1.71), rezultă:

$$\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}') = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}'_n) = -\bar{\omega}^2 \bar{r}'_n, \quad (5.130)$$

deoarece produsul scalar a doi vectori perpendiculari este nul.

Înlocuind (5.129) și (5.130) în (5.126), se obține:

$$P : \begin{cases} \bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}'_n \\ \bar{a} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}'_n - \bar{\omega}^2 \bar{r}'_n, \end{cases} \quad (5.131)$$

unde  $\bar{r}'_n$  este componenta normală pe axa mișcării a vectorului de poziție al punctului  $P$  cu primele două coordonate în reperul mobil, definit în (5.128).

**Observația 5.12** În mișcarea de rotație în jurul unei axe fixe, traiectoriile punctelor sunt cercuri normale pe axa de rotație, având centrele pe această axă.

### V.2.3. Mișcarea plan-paralelă

**Definiția 5.11** Un corp solid rigid are o mișcare plan-paralelă atunci când o secțiune plană a acestuia este conținută într-un plan de referință fix, numit *plan director al mișcării*.

Mișcarea plan-paralelă este o mișcare compusă dintr-o translație plană și o rotație plană care au loc simultan. Prin translație plană se înțelege modificarea poziției secțiunii plane a corpului în planul director al mișcării, fiind o translație cu două grade de libertate, spre deosebire de translația rectilinie cu un grad de libertate și translația spațială cu trei grade de libertate definită în V.2.1.

Se consideră un corp solid rigid ( $\mathcal{S}$ ) raportat la un reper triortogonal  $OXYZ$  și se notează  $(\Sigma)$  secțiunea volumului geometric al corpului cu planul  $OXY$ . Reperul mobil se consideră astfel încât planele  $OXY$  și  $Q'X'Y'$  să coincidă și axele  $OZ$  și  $QZ'$  să fie paralele (Figura V.12):

$$OXY \equiv QX'Y', \quad OZ \parallel QZ'. \quad (5.132)$$

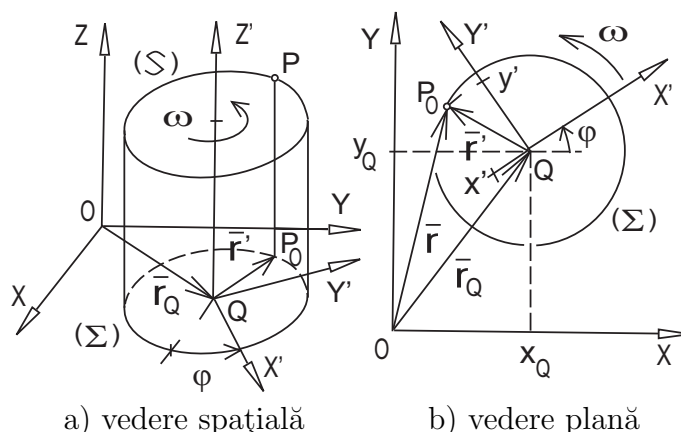


Figura V.12. Mișcarea plan-paralelă

Mișcarea plan-paralelă a corpului ( $\mathcal{S}$ ) cu planul director  $OXY$  prezintă trei grade de libertate, care sunt gradele de libertate ale secțiunii  $(\Sigma)$  în planul  $OXY$ : translațiile pe axele  $OX$ ,  $OY$  și rotația în jurul axei  $OZ$ . Gradele de libertate se exprimă analitic prin cele două coordonate ale originii mobile în reperul de referință  $(x_Q, y_Q)$ , a treia coordonată fiind zero și prin unghiul de poziție dintre axa fixă  $OX$  și axa mobilă  $QX'$ , notat  $\varphi$ .

Mișcarea plan-paralelă a corpului ( $\mathcal{S}$ ) este complet determinată dacă se cunosc în orice moment coordonatele carteziene ale polului  $Q$  în reperul de referință și unghiul de rotație. Ecuațiile parametrice ale mișcării sunt:

$$x_Q = x_Q(t), \quad y_Q = y_Q(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad t \in [t_0, t_1], \quad (5.133)$$

unde  $t_0$  este momentul inițial și  $t_1$  momentul final al mișcării, numite și *parametrii cinematici de ordinul zero*.

Funcțiile (5.133) satisfac aceleași condiții ca funcțiile (5.99).

Viteza polului  $Q$  și viteza unghiulară se definesc ca în cazul mișcării de translație (prima relație (5.102)), respectiv rotație în jurul unei axe fixe (prima relație (5.107)) și constituie *parametrii cinematici de ordinul întâi*:

$$\bar{v}_Q = \dot{x}_Q \cdot \bar{i} + \dot{y}_Q \cdot \bar{j}, \quad \bar{\omega} = \dot{\varphi} \bar{k} = \dot{\varphi} \bar{k}'. \quad (5.134)$$

Accelerația polului  $Q$  și accelerația unghiulară se definesc prin a doua relație (5.102), respectiv a doua relație (5.107), și constituie *parametrii cinematici de ordinul doi*:

$$\bar{a}_Q = \ddot{x}_Q \cdot \bar{i} + \ddot{y}_Q \cdot \bar{j}, \quad \bar{\varepsilon} = \ddot{\varphi} \bar{k} = \ddot{\varphi} \bar{k}'. \quad (5.135)$$

Relațiile de legătură între versorii reperului mobil și versorii reperului fix sunt aceleași ca în cazul mișcării de rotație plană, relațiile (5.108). Prin inversarea relațiilor (5.108), se obține:

$$\begin{cases} \bar{i} &= \bar{i}' \cdot \cos \varphi - \bar{j}' \cdot \sin \varphi, \\ \bar{j} &= \bar{i}' \cdot \sin \varphi + \bar{j}' \cdot \cos \varphi, \\ \bar{k} &= \bar{k}'. \end{cases} \quad (5.136)$$

Se consideră un punct oarecare  $P$  aparținând corpului ( $\mathcal{S}$ ) în mișcare plan-paralelă și se notează  $P_0$  proiecția punctului pe planul director al mișcării:

$$PP_0 \perp QX'Y', \quad P_0 \in QX'Y'. \quad (5.137)$$

În cazul mișcării plan-paralele, punctele  $P$  și  $P_0$  au traiectorii identice (curbe plane), aceeași viteză și aceeași accelerație la un moment dat, proprietăți implicate de definiția mișcării. Din acest motiv, studiul cinematic al corpului în mișcare plan-paralelă se poate reduce la studiul în planul director, adică la mișcarea punctului  $P_0$ .

Se notează  $\bar{r}'$  vectorul de poziție al punctului  $P_0$  în reperul mobil:

$$\bar{r}' = \overline{QP_0} = x' \cdot \bar{i}' + y' \cdot \bar{j}', \quad (5.138)$$

unde  $(x', y')$  sunt coordonatele în reperul  $QX'Y'Z'$ , a treia coordonată fiind zero.

Vectorul de poziție al punctului  $P_0$  în reperul fix este dat de relația (legea de variație a coordonatelor la translația axelor):

$$\bar{r} = \overline{OP_0} = \overline{OQ} + \overline{QP_0} = \bar{r}_Q + \bar{r}', \quad (5.139)$$

unde s-a notat vectorul de poziție al originii mobile în reperul de referință.

Viteza punctului  $P_0$  este definită de relația (5.13) în care se înlocuiește (5.139):

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}_Q}{dt} + \frac{d\bar{r}'}{dt} = \bar{v}_Q + \frac{d\bar{r}'}{dt}, \quad (5.140)$$

unde s-a înlocuit derivata vectorului de poziție al originii mobile cu viteza, conform definiției.



Conform cu (5.111), (5.114) și (5.140), viteza punctului  $P_0$  este:

$$\bar{v} = \bar{v}_Q + \bar{\omega} \times \bar{r}'. \quad (5.141)$$

Relația (5.141) reprezintă formula vitezei în mișcarea plan-paralelă.

Conform primei relații (5.134) și (5.136) componentele vitezei polului mobil pe axele reperului mobil sunt:

$$\bar{v}_Q : \begin{cases} v'_{Qx} = \dot{x}_Q \cdot \cos \varphi + \dot{y}_Q \cdot \sin \varphi, \\ v'_{Qy} = -\dot{x}_Q \cdot \sin \varphi + \dot{y}_Q \cdot \cos \varphi. \end{cases} \quad (5.142)$$

Conform (5.114), (5.115), (5.141) și (5.142), componentele vitezei punctului  $P_0$  pe axele reperului mobil sunt:

$$\begin{aligned} v'_x &= \dot{x}_Q \cdot \cos \varphi + \dot{y}_Q \cdot \sin \varphi - \dot{\varphi} y', \\ v'_y &= -\dot{x}_Q \cdot \sin \varphi + \dot{y}_Q \cdot \cos \varphi + \dot{\varphi} x'. \end{aligned} \quad (5.143)$$

Conform (5.114), (5.116), primei relații (5.134) și (5.141), componentele vitezei punctului  $P_0$  pe axele reperului fix sunt:

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x}_Q - \dot{\varphi} x' \cdot \sin \varphi - \dot{\varphi} y' \cdot \cos \varphi, \\ v_y &= \dot{y}_Q + \dot{\varphi} x' \cdot \cos \varphi - \dot{\varphi} y' \cdot \sin \varphi. \end{aligned} \quad (5.144)$$

Accelerația punctului  $P_0$  este definită de relația (5.16), în care se înlocuiește (5.141):

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\bar{v}_Q + \bar{\omega} \times \bar{r}') = \bar{a}_Q + \frac{d}{dt} (\bar{\omega} \times \bar{r}'), \quad (5.145)$$

unde s-a înlocuit derivata vitezei originii mobile cu accelerația, conform definiției.

Conform cu (5.118), (5.121) și (5.145), accelerația punctului  $P_0$  este:

$$\bar{a} = \bar{a}_Q + \bar{\varepsilon} \times \bar{r}' + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}'). \quad (5.146)$$

Observând că vectorii  $\bar{\omega}$  din (5.134) și  $\bar{r}'$  din (5.138) sunt perpendiculari și dezvoltând dublul produs vectorial din (5.146) cu formula (1.71), se obține

$$\bar{a} = \bar{a}_Q + \bar{\varepsilon} \times \bar{r}' - \bar{\omega}^2 \cdot \bar{r}'. \quad (5.147)$$

Relația (5.147) reprezintă formula accelerației în mișcarea plan-paralelă.

Conform primei relații (5.135) și (5.136), componentele accelerației polului mobil pe axele reperului mobil sunt:

$$\bar{a}_Q : \begin{cases} a'_{Qx} = \ddot{x}_Q \cdot \cos \varphi + \ddot{y}_Q \cdot \sin \varphi, \\ a'_{Qy} = -\ddot{x}_Q \cdot \sin \varphi + \ddot{y}_Q \cdot \cos \varphi. \end{cases} \quad (5.148)$$

Conform (5.121), (5.122), (5.146) și (5.148), componentele accelerației punctului  $P_0$  pe axele reperului mobil sunt:

$$\begin{aligned} a'_x &= \ddot{x}_Q \cdot \cos \varphi + \ddot{y}_Q \cdot \sin \varphi - \dot{\varphi}^2 x' - \ddot{\varphi} y', \\ a'_y &= -\ddot{x}_Q \cdot \sin \varphi + \ddot{y}_Q \cdot \cos \varphi + \ddot{\varphi} x' - \dot{\varphi}^2 y'. \end{aligned} \quad (5.149)$$

Conform (5.121), (5.124), primei relații (5.135) și (5.146), componentele accelerației punctului  $P_0$  pe axele reperului fix sunt:

$$\begin{aligned} a_x &= \ddot{x}_Q - (\dot{\varphi}^2 x' + \ddot{\varphi} y') \cos \varphi - (\ddot{\varphi} x' - \dot{\varphi}^2 y') \sin \varphi, \\ a_y &= \ddot{y}_Q - (\dot{\varphi}^2 x' + \ddot{\varphi} y') \sin \varphi + (\ddot{\varphi} x' - \dot{\varphi}^2 y') \cos \varphi. \end{aligned} \quad (5.150)$$

În mișcarea plan-paralelă, câmpurile de viteze și de accelerații sunt date de relațiile (5.141) și (5.147):

$$P : \begin{cases} \bar{v} = \bar{v}_Q + \bar{\omega} \times \bar{r}', \\ \bar{a} = \bar{a}_Q + \bar{\varepsilon} \times \bar{r}' - \bar{\omega}^2 \bar{r}', \end{cases} \quad (5.151)$$

unde viteza polului mobil și viteza unghiulară sunt definite în (5.134) cu (5.133), accelerația polului mobil și accelerația unghiulară sunt definite în (5.135) cu (5.133), iar vectorul de poziție al punctului  $P$  în reperul mobil este definit cu primele două coordonate în (5.138):

$$\bar{r}' = x' \cdot \bar{i}' + y' \cdot \bar{j}'. \quad (5.152)$$

**Observația 5.13** Formulele vitezei (5.141) și accelerației (5.146) sunt general valabile în cinematica corpului solid rigid. Sunt cunoscute în literatura de specialitate ca formulele lui Euler. Formula (5.147) este specifică mișcării plan-paralele.

În mișcarea plan-paralelă a corpului solid rigid se definesc două puncte caracteristice, polul vitezelor și polul accelerațiilor.

### V.2.3.a. Polul vitezelor

**Definiția 5.12** Se numește *pol al vitezelor* un punct în planul director al mișcării aparținând secțiunii ( $\Sigma$ ) a corpului sau solidar cu aceasta care are viteza nulă la un moment dat.

Polul vitezelor se notează  $I$  și se mai numește *centru instantaneu de rotație*, poziția sa fiind variabilă atât în reperul fix cât și în reperul mobil pe timpul mișcării.

**Definiția 5.13** Locul geometric al punctului  $I$  în raport cu reperul fix se numește *centroidă fixă*.

**Definiția 5.14** Locul geometric al punctului  $I$  în raport cu reperul mobil se numește *centroidă mobilă*.

Centroida fixă și centroida mobilă sunt curbe în planul director al mișcării, tangente în punctul  $I$ .

Egalând cu zero componentele vitezei pe axele reperului mobil date de (5.143) conform condiției de definire a polului  $I$  rezultă coordonatele acestuia:

$$C.M. : \begin{cases} x'_I = \frac{\dot{x}_Q}{\dot{\varphi}} \cdot \sin \varphi - \frac{\dot{y}_Q}{\dot{\varphi}} \cdot \cos \varphi, \\ y'_I = \frac{\dot{x}_Q}{\dot{\varphi}} \cdot \cos \varphi + \frac{\dot{y}_Q}{\dot{\varphi}} \cdot \sin \varphi, \end{cases} \quad (5.153)$$

relații care reprezintă ecuațiile parametrice ale locului geometric al punctului  $I$  în reperul mobil, centroida mobilă.

Aplicând relațiile (5.138) și (5.139) pentru punctul  $I$ , avem

$$\bar{r}'_I = x'_I \cdot \bar{i}' + y'_I \cdot \bar{j}', \quad \bar{r}_I = \bar{r}_Q + \bar{r}'_I = \bar{r}_Q + x'_I \cdot \bar{i}' + y'_I \cdot \bar{j}' = x_I \cdot \bar{i} + y_I \cdot \bar{j}, \quad (5.154)$$

unde vectorul de poziție al originii mobile este dat de relația

$$\bar{r}_Q = x_Q \cdot \bar{i} + y_Q \cdot \bar{j}, \quad (5.155)$$

cu coordonatele din (5.133).

Înlocuind (5.108) și (5.155) în a doua relație (5.154), se obține

$$\begin{aligned} x_I &= x_Q + x'_I \cdot \cos \varphi - y'_I \cdot \sin \varphi, \\ y_I &= y_Q + x'_I \cdot \sin \varphi + y'_I \cdot \cos \varphi. \end{aligned} \quad (5.156)$$

Conform (5.153) și (5.156), coordonatele polului  $I$  în reperul fix sunt:

$$C.F. : x_I = x_Q - \frac{\dot{y}_Q}{\dot{\varphi}}, \quad y_I = y_Q + \frac{\dot{x}_Q}{\dot{\varphi}}, \quad (5.157)$$

relații care reprezintă ecuațiile parametrice ale locului geometric al punctului  $I$  în reperul fix, centroida fixă.

Dacă ecuațiile parametrice ale mișcării (5.133) sunt exprimate în forma

$$x_Q = x_Q(\varphi(t)), \quad y_Q = y_Q(\varphi(t)), \quad \varphi = \varphi(t), \quad t \in [t_0, t_1], \quad (5.158)$$

cu coordonatele originii mobile ca funcții compuse de timp prin unghiul de rotație, avem:

$$\dot{x}_Q = \frac{dx_Q}{dt} = \dot{\varphi} \frac{dx_Q}{d\varphi}, \quad \dot{y}_Q = \frac{dy_Q}{dt} = \dot{\varphi} \frac{dy_Q}{d\varphi}. \quad (5.159)$$

În această ipoteză, conform (5.153), (5.157) și (5.159), ecuațiile parametrice ale centroidelor sunt:

$$C.M. : \begin{cases} x'_I = \frac{dx_Q}{d\varphi} \cdot \sin \varphi - \frac{dy_Q}{d\varphi} \cdot \cos \varphi, \\ y'_I = \frac{dx_Q}{d\varphi} \cdot \cos \varphi + \frac{dy_Q}{d\varphi} \cdot \sin \varphi, \end{cases} \quad (5.160)$$

respectiv,

$$C.F. : x_I = x_Q - \frac{dy_Q}{d\varphi}, \quad y_I = y_Q + \frac{dx_Q}{d\varphi}. \quad (5.161)$$

**Observația 5.14** Ca poziție geometrică, centrul instantaneu de rotație se determină la intersecția perpendicularelor pe direcțiile vitezelor a două puncte oarecare ale secțiunii ( $\Sigma$ ). Centroidele mișcării plan-palalele pot fi determinate și ca probleme de loc geometric.

### V.2.3.b. Polul accelerațiilor

**Definiția 5.15** Se numește *pol al accelerațiilor* un punct în planul director al mișcării apariținând secțiunii ( $\Sigma$ ) a corpului sau solidar cu aceasta care are accelerație nulă la un moment dat.

Polul accelerațiilor se notează  $J$  și are caracter instantaneu ca și polul vitezelor, poziția sa fiind variabilă atât în reperul fix cât și în reperul mobil pe timpul mișcării.

Egalând cu zero componentele accelerației pe axele reperului mobil date de (5.149) conform condiției de definire a polului accelerațiilor și rezolvând sistemul de două ecuații cu două necunoscute astfel obținut rezultă coordonatele polului  $J$  pe axele reperului mobil:

$$\begin{aligned} x'_J &= \frac{\ddot{\varphi} \ddot{x}_Q + \dot{\varphi}^2 \ddot{y}_Q}{\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2} \cdot \sin \varphi + \frac{\dot{\varphi}^2 \ddot{x}_Q - \ddot{\varphi} \ddot{y}_Q}{\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2} \cdot \cos \varphi, \\ y'_J &= \frac{\ddot{\varphi} \ddot{x}_Q + \dot{\varphi}^2 \ddot{y}_Q}{\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2} \cdot \cos \varphi - \frac{\dot{\varphi}^2 \ddot{x}_Q - \ddot{\varphi} \ddot{y}_Q}{\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2} \cdot \sin \varphi. \end{aligned} \quad (5.162)$$

Aplicând relațiile (5.156) pentru punctul  $J$ , avem:

$$\begin{aligned} x_J &= x_Q + x'_J \cdot \cos \varphi - y'_J \cdot \sin \varphi, \\ y_J &= y_Q + x'_J \cdot \sin \varphi + y'_J \cdot \cos \varphi. \end{aligned} \quad (5.163)$$

Conform (5.162) și (5.163), coordonatele polului  $J$  în reperul fix sunt:

$$x_J = x_Q + \frac{\dot{\varphi}^2 \ddot{x}_Q - \ddot{\varphi} \ddot{y}_Q}{\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2}, \quad y_J = y_Q + \frac{\ddot{\varphi} \ddot{x}_Q + \dot{\varphi}^2 \ddot{y}_Q}{\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2}. \quad (5.164)$$

**Observația 5.15** Ca poziție geometrică, polul accelerațiilor se determină la intersecția dreptelor care fac același unghi  $\chi$  cu direcțiile accelerațiilor a două puncte oarecare ale secțiunii ( $\Sigma$ ), unghi dat de relația ([11], [12], [20]):

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}^2}. \quad (5.165)$$

### V.2.4. Mișcarea elicoidală

**Definiția 5.16** Un corp solid rigid are o mișcare elicoidală atunci când un segment de dreaptă al acestuia ocupă poziții pe o axă (dreaptă) fixă în spațiu pe timpul mișcării.

Axa care conține segmentul mobil de dreaptă se numește *axa mișcării elicoidale* și poate să nu intersecteze volumul fizic al corpului, fiind solidară cu corpul, adică are în orice moment al mișcării aceeași poziție relativă față de corp. Mișcarea elicoidală este o mișcare compusă dintr-o rotație în jurul unei axe fixe și o translație rectilinie pe aceeași axă care au loc simultan. Axa comună de rotație și de translație se notează în mod curent ( $\Delta$ ). Mișcarea se numește *elicoidală* deoarece segmentul de dreaptă care unește un punct al corpului cu un punct de pe axa mișcării descrie o suprafață numită *elicoidală* sau *elicoid* ([26], [27], [29]).

Se consideră un corp solid rigid ( $\mathcal{S}$ ) raportat la un reper triortogonal  $OXYZ$ . Reperul mobil se consideră astfel încât axele  $QZ'$  și  $OZ$  să coincidă (Figura V.13):

$$QZ' \equiv OZ \equiv (\Delta). \quad (5.166)$$

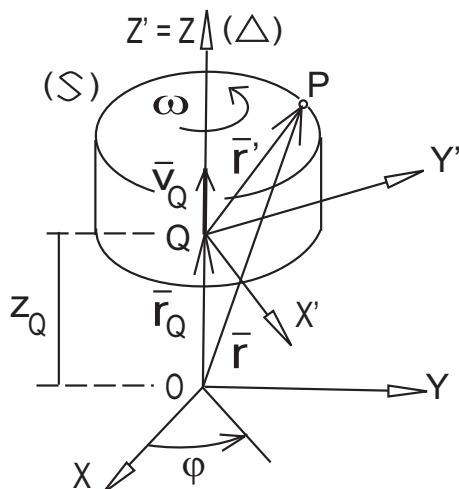


Figura V.13. Mișcarea elicoidală

Mișcarea elicoidală a corpului ( $\mathcal{S}$ ) pe axa fixă ( $\Delta$ ) prezintă două grade de libertate: corpul se poate roti în jurul axei  $OZ$  și se poate transla pe aceeași axă. Gradele de libertate se exprimă analitic prin cota originii mobile în reperul de referință ( $z_Q$ ), primele două coordonate fiind nule și prin unghiul de poziție dintre axa fixă  $OX$  și axa mobilă  $QX'$ , notat  $\varphi$ .

Mișcarea elicoidală a corpului ( $\mathcal{S}$ ) este complet determinată dacă se cunosc în orice moment cota polului  $Q$  în reperul de referință și unghiul de rotație. Ecuațiile parametrice ale mișcării sunt:

$$z_Q = z_Q(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad t \in [t_0, t_1], \quad (5.167)$$

unde  $t_0$  este momentul inițial și  $t_1$  momentul final al mișcării, numite și *parametri cinematici de ordinul zero*.

Funcțiile (5.167) satisfac aceleași condiții ca funcțiile (5.99).

Viteza polului  $Q$  și viteza unghiulară se definesc ca în cazul mișcării de translație (prima relație (5.102)), respectiv rotație în jurul unei axe fixe (prima relație (5.107)) și constituie *parametrii cinematici de ordinul întâi*:

$$\bar{v}_Q = \dot{z}_Q \cdot \bar{k} = \dot{z}_Q \cdot \bar{k}', \quad \bar{\omega} = \dot{\varphi} \bar{k} = \dot{\varphi} \bar{k}'. \quad (5.168)$$

Accelerația polului  $Q$  și accelerația unghiulară se definesc prin a doua relație (5.102), respectiv a doua relație (5.107) și constituie *parametrii cinematici de ordinul doi*:

$$\bar{a}_Q = \ddot{z}_Q \cdot \bar{k} = \ddot{z}_Q \cdot \bar{k}', \quad \bar{\varepsilon} = \ddot{\varphi} \bar{k} = \ddot{\varphi} \bar{k}'. \quad (5.169)$$

Relațiile de legătură între versorii reperului mobil și versorii reperului fix sunt aceleași ca în cazul mișcării de rotație în jurul unei axe fixe, relațiile (5.108), respectiv (5.136).

Se consideră un punct oarecare  $P$  aparținând corpului ( $\mathcal{S}$ ) în mișcare elicoidală. Vectorul de poziție al punctului  $P$  în reperul mobil este:

$$\vec{r}' = \overline{QP} = x' \cdot \vec{i}' + y' \cdot \vec{j}' + z' \cdot \vec{k}', \quad (5.170)$$

unde  $(x', y', z')$  sunt coordonatele în reperul  $QX'Y'Z'$ .

Vectorul de poziție al punctului  $P$  în reperul fix este dat de relația (legea de variație a coordonatelor la translația axelor):

$$\vec{r} = \overline{OP} = \overline{OQ} + \overline{QP} = \vec{r}_Q + \vec{r}', \quad (5.171)$$

unde s-a notat vectorul de poziție al originii mobile în reperul de referință.

Viteza punctului  $P$  este definită de relația (5.13) în care se înlocuiește (5.171):

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_Q}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{v}_Q + \frac{d\vec{r}'}{dt}, \quad (5.172)$$

unde s-a înlocuit derivata vectorului de poziție al originii mobile cu viteza, conform definiției.

Conform cu (5.111), (5.114) și (5.172), viteza punctului  $P$  este

$$\vec{v} = \vec{v}_Q + \vec{\omega} \times \vec{r}'. \quad (5.173)$$

Relația (5.173) reprezintă formula vitezei în mișcarea elicoidală.

Conform (5.114), (5.115), primei relații (5.168) și (5.173), componentele vitezei pe axele reperului mobil sunt:

$$v'_x = -\dot{\varphi} \cdot y', \quad v'_y = \dot{\varphi} \cdot x', \quad v'_z = \dot{z}_Q. \quad (5.174)$$

Conform (5.114), (5.116), primei relații (5.168) și (5.173), componentele vitezei pe axele reperului fix sunt:

$$\begin{aligned} v_x &= -\dot{\varphi} x' \cdot \sin \varphi - \dot{\varphi} y' \cdot \cos \varphi, \\ v_y &= \dot{\varphi} x' \cdot \cos \varphi - \dot{\varphi} y' \cdot \sin \varphi, \end{aligned} \quad v_z = \dot{z}_Q. \quad (5.175)$$

Modulul vitezei este

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2} = \sqrt{\dot{\varphi}^2(x'^2 + y'^2) + \dot{z}_Q^2}. \quad (5.176)$$

Accelerația punctului  $P$  este definită de relația (5.16), în care se înlocuiește (5.173):

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{v}_Q + \vec{\omega} \times \vec{r}') = \vec{a}_Q + \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \times \vec{r}'), \quad (5.177)$$

unde s-a înlocuit derivata vitezei polului mobil cu accelerația, conform definiției.

Conform cu (5.118), (5.121) și (5.177), accelerația punctului  $P$  este

$$\bar{a} = \bar{a}_Q + \bar{\varepsilon} \times \bar{r}' + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}'). \quad (5.178)$$

Relația (5.178) reprezintă formula accelerației în mișcarea elicoidală.

Pentru formulele (5.173) și (5.178) este valabilă Observația 5.13.

Conform (5.121), (5.122), primei relații (5.169) și (5.178), componentele accelerației pe axele reperului mobil sunt:

$$a'_x = -\dot{\varphi}^2 x' - \ddot{\varphi} y', \quad a'_y = \ddot{\varphi} x' - \dot{\varphi}^2 y', \quad a'_z = \ddot{z}_Q. \quad (5.179)$$

Conform (5.121), (5.124), primei relații (5.169) și (5.178), componentele accelerației pe axele reperului fix sunt:

$$\begin{aligned} a_x &= -(\dot{\varphi}^2 x' + \ddot{\varphi} y') \cos \varphi - (\ddot{\varphi} x' - \dot{\varphi}^2 y') \sin \varphi \\ a_y &= -(\dot{\varphi}^2 x' + \ddot{\varphi} y') \sin \varphi + (\ddot{\varphi} x' - \dot{\varphi}^2 y') \cos \varphi, \\ a_z &= \ddot{z}_Q. \end{aligned} \quad (5.180)$$

Modulul accelerației este

$$\begin{aligned} |\bar{a}| &= \sqrt{a'^2_x + a'^2_y + a'^2_z}, \\ |\bar{a}| &= \sqrt{(\dot{\varphi}^2 x' + \ddot{\varphi} y')^2 + (\ddot{\varphi} x' - \dot{\varphi}^2 y')^2 + \ddot{z}_Q^2}. \end{aligned} \quad (5.181)$$

În mișcarea elicoidală câmpurile de viteze și de accelerații sunt date de relațiile (5.173) și (5.178):

$$P : \begin{cases} \bar{v} = \bar{v}_Q + \bar{\omega} \times \bar{r}', \\ \bar{a} = \bar{a}_Q + \bar{\varepsilon} \times \bar{r}' + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}'), \end{cases} \quad (5.182)$$

unde viteza polului mobil și viteza unghiulară sunt date de (5.168) cu (5.167), accelerația polului mobil și accelerația unghiulară sunt date de (5.169) cu (5.167), iar vectorul de poziție al punctului  $P$  în reperul mobil este definit în (5.170):

$$\bar{r}' = x' \cdot \bar{i}' + y' \cdot \bar{j}' + z' \cdot \bar{k}'. \quad (5.183)$$

Ca și în cazul mișcării de rotație în jurul unei axe fixe, viteza și accelerația se pot exprima prin relațiile:

$$P : \begin{cases} \bar{v} = \bar{v}_Q + \bar{\omega} \times \bar{r}'_n, \\ \bar{a} = \bar{a}_Q + \bar{\varepsilon} \times \bar{r}'_n - \bar{\omega}^2 \bar{r}'_n, \end{cases} \quad (5.184)$$

unde  $\bar{r}'_n$  este componenta normală pe axa mișcării a vectorului de poziție al punctului  $P$  cu primele două coordonate în reperul mobil:

$$\bar{r}'_n = x' \cdot \bar{i}' + y' \cdot \bar{j}'. \quad (5.185)$$

**Observația 5.16** Formulele (5.182) sunt general valabile în cinematica corpului solid rigid. Sunt cunoscute în literatura de specialitate ca formulele lui Euler. Formulele (5.184) sunt specifice mișcării elicoidale.

**Observația 5.17** În mișcarea elicoidală, traiectoriile punctelor sunt elici cilindrice circulare având raza egală cu distanța de la punct la axa mișcării.

**Observația 5.18** Un caz particular al mișcării elicoidale este mișcarea de șurub, atunci când între parametrii mișcării ( $z_Q$  și  $\varphi$ ) există o dependență liniară

$$z_Q = \frac{p}{2\pi} \cdot \varphi + z_0, \quad (5.186)$$

unde  $p$  și  $z_0$  sunt constante reale.

Mișcarea de șurub are un singur grad de libertate și este mișcarea cuplei cinematice șurub-piuliță (IV.2.3).



# Bibliografie

- [1] Colectivul catedrei de Analiză Matematică a Universității București, *Analiză Matematică*, volumul I, ediția a V-a, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1977.
- [2] Colectivul catedrei de Analiză Matematică a Universității București, *Analiză Matematică*, volumul II, ediția a III-a, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1980.
- [3] Mihail Atanasiu, *Mecanica*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1973.
- [4] Ștefan Bălan, *Complemente de mecanică teoretică*, ediția a II-a, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1975.
- [5] M. Bercovici, Ș. Rimer, A. Triandaf, *Culegere de probleme de geometrie analitică și diferențială*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1973.
- [6] Luminița Budei, Radu Budei, Radu Romanică, *Mecanica. Statica și geometria maselor*, Editura Universității Tehnice "Gh. Asachi" din Iași, 2001, ISBN 973-8050-94-4.
- [7] N. Efimov, *Éléments de Géométrie Analytique*, 4<sup>e</sup> édition revue, traduit du russe par Mikhail Rygalov, Editions Mir, Moscou, 1976.
- [8] G.M. Fihtenholt, *Curs de calcul diferențial și integral*, volumul III, traducere din limba rusă, Editura Tehnică, București, 1965.
- [9] Caius Iacob, *Mecanica teoretică*, ediția a II-a, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1980.
- [10] Caius Iacob, Cosntantin Cristea, Viorica Iacob, Nicolae Mihăileanu, Rodica Trandafir, Ioan Tomescu, Corneliu Zidăroiu, *Matematici clasice și moderne*, volumul I, Editura Tehnică, București, 1978.
- [11] Radu Ibănescu, Elisabeta Rusu, *Mecanică. Cinematică*, Editura Cermi, Iași, 1998, ISBN 973-9378-24-2.
- [12] Dumitru Mangeron, Nicolae Irimiciuc, *Mecanica rigidelor cu aplicații în inginerie*, volumul I: *Mecanica rigidului*, Editura Tehnică, București, 1978.
- [13] Dumitru Mangeron, Nicolae Irimiciuc, *Mecanica rigidelor cu aplicații în inginerie*, volumul II: *Mecanica sistemelor de rigide*, Editura Tehnică, București, 1980.
- [14] Nicolae Moșu, Gheorghe Deliu, Nicolae Sîrbu, Nicolae Nicolaescu, Ioan Cîndea, Florin Constantin, Octavian Dumitru, *Mecanica*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981.
- [15] Constantin Niță, Tiberiu Spircu, *Probleme de structuri algebrice*, Editura Tehnică, București, 1974.

- [16] Valter Olariu, *Analiză Matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982.
- [17] Virgil Olariu, Petre Sima, Valeriu Achiriloaie, *Mecanică tehnică*, Editura Tehnică, București, 1982.
- [18] Dan I. Papuc, *Geometrie diferențială*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982.
- [19] Gheorghe Procopiuc, Nicolae Ionescu, *Probleme de algebră liniară și geometrie*, Editura Tehnică – Info, Chișinău, 2002.
- [20] Marin Rădoi, Eugen Deciu, *Mecanica*, ediția a II-a revizuită, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981.
- [21] Marin Rădoi, Eugen Deciu, *Mecanica*, ediția a III-a revizuită, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1993.
- [22] Andrei Ripianu, Paul Popescu, Barbu Bălan, *Mecanică tehnică pentru subingineri*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1979.
- [23] Marcel Roșculeț, *Analiză Matematică*, ediția a II-a, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1979.
- [24] Marcel Roșculeț, *Algebră liniară, geometrie analitică și geometrie diferențială*, Editura Tehnică, București, 1987.
- [25] Octavian Stănășilă, *Analiză Matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981.
- [26] Ion D. Teodorescu, *Geometrie analitică și elemente de algebră liniară*, culegere de probleme, ediția a II-a, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1971.
- [27] Petre P. Teodorescu, *Sisteme mecanice. Modele clasice*, volumul I, Editura Tehnică, București, 1984.
- [28] Emil Tocaci, *Mecanica*, curs și culegere de probleme, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1985.
- [29] Constantin Udriște, Constantin Radu, Constantin Dicu, Odetta Mălăncioiu, *Algebră, geometrie și ecuații diferențiale*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982.
- [30] Radu Voinea, Dumitru Voiculescu, Valentin Ceașu, *Mecanica*, ediția a doua revizuită, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983.
- [31] *Tabele matematice uzuale*, ediția a IV-a, Editura Tehnică, București, 1968.
- [32] *Tabele matematice uzuale*, ediția a VIII-a revăzută și îmbunătățită, Editura Tehnică, București, 1975.